

Введение в группы классов отображений

Задачи к лекции 2:

Кривые и петли на поверхностях

21 февраля 2024

Задача 1. Пусть $f, f' : X \rightarrow Y$ — непрерывные отображение топологических пространств, переводящие отмеченную точку $x_0 \in X$ в отмеченную точку $y_0 \in Y$.

а) Предположим, между f и f' существует гомотопия, сохраняющая отмеченную точку. Проверьте, что гомоморфизмы $f_* : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$ и $f'_* : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$ равны.

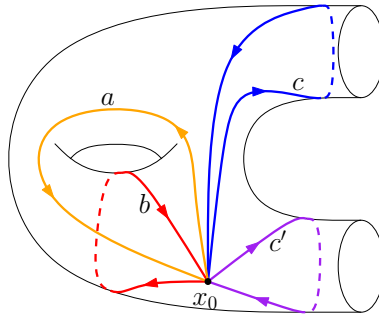
б) Предположим, между f и f' существует гомотопия, *не обязательно* сохраняющая отмеченную точку. Проверьте, что гомоморфизмы $f_* : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$ и $f'_* : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$ сопряжены, то есть существует петля $b \in \pi_1(Y)$, такая что $f'_*(a) = b \cdot f_*(a) \cdot b^{-1}$ для всех $a \in \pi_1(X)$.

Задача 2. Рассмотрим образующие фундаментальной группы тора: обход по параллели a и обход по меридиану b . Постройте явную гомотопию между композициями петель ab и ba .

Задача 3. Напомним, через S_g^k обозначается компактная поверхность рода g с k компонентами края. а) Докажите, что при $k > 0$ группа $\pi_1(S_g^k)$ свободна и найдите число образующих.

б) Какие поверхности с краем гомотопически эквивалентны друг другу?

Задача 4. Для следующих петель на торе с двумя дырками выразите c' через c , a и b .



Задача 5. Для пространства X определим группу первых гомологий $H_1(X; \mathbb{Z})$ (с целыми коэффициентами) как фактор свободной абелевой группы Z_1 по соотношениям $B_1 \subset Z_1$, где

- группа Z_1 порождается всеми возможными замкнутыми кривыми $\alpha : S^1 \rightarrow X$;
- соотношения B_1 порождаются суммами $\alpha_1 + \dots + \alpha_k$ для всевозможных отображений $f : S_g^k \rightarrow X$, таких что на i -й компоненте края f совпадает с α_i .

Другими словами, сумма кривых $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ в X равна нулю в гомологиях, если объединение этих кривых можно затянуть в X ориентируемой плёнкой (возможно, положительного рода).¹

а) Проверьте, что если кривые α и α' гомтопны, то они равны в гомологиях (т. е. их разность лежит в B_1 ; такие пары кривых называют *гомологичными*).

б) Приведите пример пары гомологичных, но не гомотопных кривых на замкнутой поверхности.

в) Покажите, что если a и b — гомологичные петли с началом в отмеченной точке, то классы a и b в абелианизации $\pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)]$ равны.

г) Покажите, что петля $aba^{-1}b^{-1}$ гомологична нулю для любых $a, b \in \pi_1(X)$.

Задача 6. Докажите, что любой класс в первых гомологиях замкнутой поверхности равен классу некоторой простой замкнутой кривой с некоторым целым коэффициентом.

¹При этом ориентация края плёнки S_g^k фиксирована стандартным образом. А именно, если задана ориентация внутри S_g^k , для каждой компоненты края P потребуем, чтобы вектор направления P и вектор внешней нормали к P образовывали положительно ориентированный репер.