

# Топология трёхмерных многообразий

## Задачи к лекции 4:

### Линзовые пространства

9 марта 2023

**Задача 1.** Выделим на границе полнотория  $D^2 \times S^1$  параллель  $\beta = 1 \times S^1$  и меридиан  $\alpha = \partial D^2 \times 1$ . Дана простая замкнутая кривая  $\gamma \subset \partial D^2 \times S^1$ , проходящая  $p$  раз вдоль параллели и  $q$  раз вдоль меридиана. Пусть  $f : D^2 \times S^1 \rightarrow D^2 \times S^1$  — гомеоморфизм, положим  $f(\gamma)$  проходит  $p'$  раз вдоль параллели и  $q'$  раз вдоль меридиана.

- а) Докажите, что  $p' = \pm p$ .
- б) Докажите, что  $q'$  может принимать любые значения вида  $pk \pm q$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , причём только их.
- в) Докажите, что  $p$  и  $q$  взаимно просты.

**Задача 2.** а) Докажите, что линзовые пространства допускают  $S^1$ -действие, при котором лишь конечное число орбит имеет нетривиальный стабилизатор, причём конечный. (Такие многообразия называются *многообразиями Зейферта*.)

- б) Покажите, что на  $S^3$  свободное  $S^1$ -действие единственно с точностью до гомеоморфизма.
- в) Перечислите линзовые пространства, допускающие свободное  $S^1$ -действие.