

# Топология трёхмерных многообразий

## Задачи к лекции 6:

### Функции Морса и разложение многообразий на ручки

23 марта 2023

**Задача 1.** а) Ориентируемое связное двумерное многообразие с краем склеено из  $a_0$  ручек индекса 0 и из  $a_1$  ручек индекса 1. Докажите, что оно диффеоморфно поверхности  $S_g^n$  рода  $g$  с  $n$  компонентами края. Чему могут равняться  $g$  и  $n$ ?

б) Ориентируемое связное трёхмерное многообразие с краем склеено из  $a_0$  ручек индекса 0 и из  $a_1$  ручек индекса 1. Докажите, что оно диффеоморфно телу с  $g$  ручками. Чему может равняться  $g$ ?

**Задача 2.** Докажите, что критические точки функции  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  невырождены (т. е. гессиан в них не равен нулю) если и только если сечение  $df : M \rightarrow T^*M$  трансверсально нулевому сечению.

**Задача 3.** а) Докажите, что на замкнутом связном многообразии существует<sup>1</sup> функция Морса, имеющая ровно один локальный минимум и ровно один локальный максимум.

б) Докажите, что на компактном связном многообразии с краем существует неотрицательная функция Морса, принимающая значение 0 на крае и не имеющая других локальных минимумов.

в) Докажите, что на некомпактном связном многообразии существует функция без критических точек.

---

<sup>1</sup>Например, можно построить не обязательно морсовскую функцию с таким свойством, а потом пошевелить *достаточно мало* в топологии Уитни так, чтобы это свойство не нарушилось.