СТЕПЕННЫ́Е ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ (А. Скопенков)

0. Даны числа $n, d_1, \dots, d_n$.

(a) При каких условиях существует граф с n вершинами (возможно, имеющий петли и кратные ребра), из которых выходит $d_1, \dots, d_n$ ребер, соответственно?

(b) То же, если граф не может иметь петель (но, возможно, имеет кратные ребра).

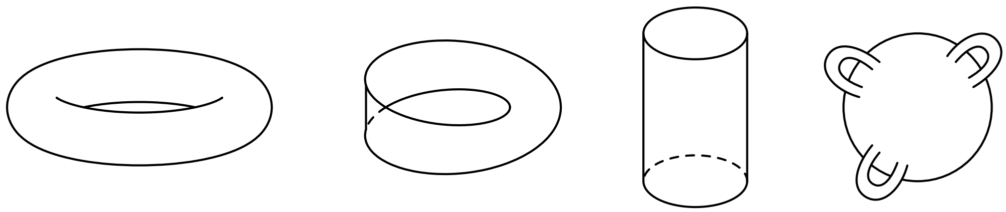
(c) То же, если граф не может иметь кратных ребер (но, возможно, имеет петли).

(d) То же, если граф не может иметь ни петель, ни кратных ребер.

1. (abcd) То же, что в задаче 0, для связных графов.

Граф называется *планарным*, если его можно нарисовать на плоскости так, чтобы внутренности ребер (то есть ребра без их концов) не пересекались и не самопересекались. Подробнее см. [Ha, Pr04, Sk05].

2. (abcd) То же, что в задаче 0, для связных *планарных* графов.



Тор, лист Мебиуса, цилиндр и сфера с ручками

Пусть на торе (или на сфере с ручками, или на диске с листами Мебиуса) нарисован без самопересечений граф. Назовем *гранью* замкнутую область на торе, ограниченную ребрами этого графа.

Реализация графа на торе (или на сфере с ручками) называется *клеточной*, если каждая грань разбивается любой ломаной с концами на границе этой грани (т.е. топологически эквивалентна замкнутому диску на плоскости).

3. (abcd) То же, что в задаче 0, для связных *клеточно реализуемых на торе* графов.

4. (abcd) То же, что в задаче 0, для связных *клеточно реализуемых на сфере с g ручками* графов (g дано вместе с n и $d_1, \dots, d_n$).

Реализация графа на листе Мебиуса (или на диске с листами Мебиуса, нарисованном на лекции 9.12) называется *клеточной*, если одна грань топологически эквивалентна кольцу, а каждая из оставшихся остальные — замкнутому диску на плоскости.

5. (abcd) То же, что в задаче 0, для связных *клеточно реализуемых на листе Мебиуса* графов.

6. (abcd) То же, что в задаче 0, для связных *клеточно реализуемых на диске с m листами Мебиуса* графов (m дано вместе с n и $d_1, \dots, d_n$).

2'-6'. (abcd) То же, что в задачах 2-6, если требуется построить граф с n гранями, в границе которых $d_1, \dots, d_n$ ребер, соответственно.

Задача 0 известна [Ha]. По-видимому, задача 1 известна. Пункты (a,b) задач 2-6 известны [Mo]. По-видимому, пункты (c) задач 2-6 неизвестны. Пункты (d) задач 2–6 неизвестны. Дополнительная информация будет сообщена Г. Б. Шабатом.

Указания.

Для получения необходимых условий в задачах 2, 3, 4 нужен следующий факт.

Формула Эйлера для сферы с g ручками. *Пусть на сфере с g ручками нарисован без самопересечений клеточно связный граф с V вершинами и E ребрами. Пусть F — число граней. Тогда $V - E + F = 2 - 2g$.*

Для решения задач 5 и 6 полезен аналог этого факта для диска с m листами Мебиуса.

Более подробно о сферах с ручками и дисках с листами Мебиуса см. [BE82, Pr95, Sk07].

Необходимые и достаточные условия. Обозначим $e := (d_1 + \dots + d_n)/2$.

0. [Ha] (a) e целое.

(d) e целое, $d_1 \le n-1$ и $d_1 + \dots + d_r \le r(r-1) + \sum_{i=1}^{r} \min\{r, d_i\}$ для любого $r = 1, \dots, n-1$, где $d_1 \ge d_2 \ge \dots \ge d_n$.

1. (a) e целое и $e \ge n-1$.

5. (a) e целое и $e \ge n-1+2g$ [Mo].

(b) e целое, $e \ge \max d_i$ и $e \ge n-1+2g$ [Mo].

6. (a) e целое и $e \ge n-1+m$ [Mo].

(b) e целое, $e \ge \max d_i$ и $e \ge n-1+m$ [Mo].

Литература

[BE82] В. Г. Болтянский и В. А. Ефремович, Наглядная топология, Наука, Москва, 1982.

[Ha] F. Harary, Graph theory.

[Mo] B. Mohar, 2-cell embeddings with prescribed face lengths and genus, submitted.

[Pr95] В. В. Прасолов, Наглядная топология, МЦНМО, Москва, 1995.

[Pr04] В. В. Прасолов, Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии, МЦНМО, Москва, 2004.

[Sk05] А. Скопенков, Вокруг критерия Куратовского планарности графов, Мат. Просвещение, 9 (2005), 116–128 и 10 (2006), 276–277. http://www.mccme.ru/free-books/matprosa.html Расширенная обновляемая версия: http://dfgm.math.msu.su/files/skopenkov/kuratow.pdf

[Sk07] А. Скопенков, Алгебраическая топология с элементарной точки зрения, МЦНМО, Москва, в печати, http://dfgm.math.msu.su/files/skopenkov/obstruct2.ps