ГЕОМЕТРИЯ ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ

А. А. Заславский zaslavsky@mccme.ru

Будем рассматривать парные сравнения n объектов с ничьими, при которых эксперту предъявляются все возможные пары объектов, и эксперт либо сообщает, какой из них предпочтительнее, либо объявляет объекты равноценными. Результаты сравнений будем записывать в матрицу X (без диагональных элементов), так что если эксперт предпочел i-й объект j-му, то $x_{ij} = 1$ и $x_{ji} = 0$, а если эти объекты равноценны, то $x_{ij} = x_{ji} = 1/2$. Таким образом, для любых различных i и j $x_{ij} + x_{ji} = 1$. Для каждого объекта найдем сумму набранных им очков: $s_i = \sum_{j \neq i} x_{ij}$. Будем считать объекты упорядоченными по возрастанию этих сумм, т.е. $s_1 \leq \cdots \leq s_n$.

Вообще говоря, ответы эксперта могут содержать противоречия, т.е. в матрице X могут быть подматрицы 3×3 одного из следующих видов:

$$\begin{pmatrix} - & 1 & 0 \\ 0 & - & 1 \\ 1 & 0 & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - & 1 & 1/2 \\ 0 & - & 1 \\ 1/2 & 0 & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - & 1/2 & 1 \\ 1/2 & - & 1/2 \\ 0 & 1/2 & - \end{pmatrix}.$$

Если X не содержит таких подматриц, то объекты можно разбить на несколько классов, причем эксперт объекты из одного класса считает равноценными, а объект из класса с большим номером предпочитает объекту из класса с меньшим номером. Такие матрицы будем называть *транзитивными*.

Возьмем теперь в n-мерном пространстве для каждой матрицы X точку с координатами $(s_1, \ldots, s_n)$ и построим выпуклую оболочку M этих точек. В работе [1] доказано следующее утверждение, описывающее строение множества M.

Основная теорема. M является $(n-1)$-мерным многогранником, комбинаторно эквивалентным[1] *соответствующему кубу, а его вершины соответствуют транзитивным матрицам* (точнее, матрицам с таким же распределением очков, поскольку внутри группы объектов с равными суммами очков могут быть нетранзитивные тройки).

Отметим также следующую естественную интерпретацию ребер многогранника M: две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда одно из соответствующих им разбиений получается из другого "склеиванием" двух соседних классов в один.

Опишем теперь некоторые другие свойства M.

1. M имеет $]n/2[$-мерную плоскость симметрии, задаваемую уравнениями $s_1 + s_n = s_2 + s_{n-1} = \cdots = n-1$.

2. M вписан в сферу, диаметром которой является отрезок между точками $(\frac{n-1}{2}, \ldots, \frac{n-1}{2})$ и $(0, 1, \cdots, n-1)$. Обе эти точки являются вершинами M, первая соответствует равноценности всех объектов, вторая — их строгому упорядочению. Центр сферы O имеет координаты $s_1 = \frac{n-1}{4}$, $s_2 = s_1 + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{4}$, $\ldots$,

[1] Два d-мерных многогранника называются комбинаторно эквивалентными, если можно установить взаимнооднозначное соответствие между их вершинами и гранями размерности $1, 2, \ldots, d-1$, сохраняющее инцидентность вершин граням.

$s_n = \frac{3(n-1)}{4}$, а ее радиус равен $\sqrt{(n^3-n)/12}$. При нечетном n координаты центра оказываются полуцелыми и, следовательно, существует соответствующая матрица парных сравнений.

3. Объем многогранника M задается формулой $V(M) = n^{n-\frac{3}{2}}$.

Задачи

1. В практических экспертизах, как правило, ответ на поставленный вопрос дают несколько экспертов, после чего их мнения агрегируются. Получение агрегированного мнения является достаточно сложной математической задачей, для решения которой разработано множество методов. Многие из этих методов основаны на введении некоторой меры близости между ответами экспертов и минимизации среднего значения этой меры между итоговой оценкой и ответами экспертов. В частности, в методе парных сравнений часто применяется метрика Кемени [**?**]. При ее использовании, если ответам экспертов соответствуют матрицы $X^1, \ldots, X^N$, то итоговая матрица $\widetilde{X}$ определяется по правилу большинства:

$$\widetilde{x}_{ij} = \begin{cases} 1, & \sum_{l=1}^N x_{ij}^l > \sum_{l=1}^N x_{ji}^l, \\ \frac{1}{2}, & \sum_{l=1}^N x_{ij}^l = \sum_{l=1}^N x_{ji}^l, \\ 0, & \sum_{l=1}^N x_{ij}^l < \sum_{l=1}^N x_{ji}^l. \end{cases}$$

Известно, что матрица $\widetilde{X}$ может оказаться нетранзитивной даже при транзитивных $X^1, \ldots, X^N$. Поэтому если результат экспертизы должен быть транзитивным, то возникает задача определения транзитивной матрицы, ближайшей к $\widetilde{X}$. В случае использования в качестве меры близости метрики Кемени эта задача оказывается в вычислительном отношении весьма сложной [**?**]. Поэтому представляется перспективным следующий "геометрический" подход.

Построим точку $P \in M$, соответствующую матрице $\widetilde{X}$, и будем искать ближайшую к P вершину M. Надо сказать, что для произвольного многогранника эта задача крайне сложна. Но, так как M вписан в сферу, она допускает довольно простое решение. Действительно, введем систему координат, в которой O является началом, сфера, описанная вокруг M, имеет единичный радиус, а координаты точки P равны $(0, \ldots, 0, y_0)$, где $0 < y_0 < 1$. Тогда для произвольной точки сферы X с координатами $(y_1, \ldots, y_n)$ имеем

$$|XP|^2 = y_1^2 + \cdots + y_{n-1}^2 + (y_n - y_0)^2 = 1 - 2y_n y_0 + y_0^2,$$

т.е. расстояние $|XP|$ есть монотонно убывающая функция y_n. Отсюда следует, что ближайшей к P будет вершина, проекция которой на ось OP максимальна. Следовательно, задача сводится к максимизации линейной функции на множестве вершин выпуклого многогранника M, или, что то же самое, на всем многограннике. Таким образом, итоговое мнение экспертов может быть найдено, как решение стандартной задачи линейного программирования.

Найденная вершина определяет суммы очков объектов, т.е. мощности классов эквивалентных объектов. При этом естественно сохранить порядок объектов, задаваемый суммами очков матрицы $\widetilde{X}$. Действительно, если $s_1, \ldots, s_n$ — строчные суммы матрицы $\widetilde{X}$, $s'_1, \ldots, s'_n$ — строчные суммы матрицы, соответствующей найденной вершине M, а σ — произвольная перестановка чисел $1, \ldots, n$, то

$$\sum_{i=1}^{n}(s_i - s'_{\sigma(i)})^2 = C - 2\sum_{i=1}^{n} s_i s'_{\sigma(i)},$$

где C не зависит от σ. Известно (см.,например, [?]), что сумма произведений $\sum_i s_i s'_{\sigma(i)}$ принимает наибольшее значение, когда числа s_i и $s_{\sigma(i)}$ упорядочены одинаково. Следовательно, наименьшее расстояние между векторами строчных сумм достигается при сохранении порядка объектов.

Можно показать также, что объекты с равными строчными суммами в матрице $\widetilde{X}$ остаются равноценными в итоговом упорядочении. Действительно, пусть точка, соответствующая $\widetilde{X}$, принадлежит грани G многогранника M, задаваемой условием $s_k = s_{k+1}$. Поскольку проекция центра описанной сферы на любую грань M лежит внутри этой грани, ближайшая к $\widetilde{X}$ вершина также принадлежит грани G.

Так как упорядочение, задаваемое медианой Кемени, может довольно сильно отличаться от упорядочения по суммам очков, различие между найденным решением и медианой Кемени, вообще говоря, также может быть довольно большим. Однако скорее всего, при достаточно высокой согласованности исходных экспертных оценок отличие будет невелико. Для получения окончательного ответа на этот вопрос представляется целесообразным провести серию вычислительных экспериментов.

2. Определение степени противоречивости каждого эксперта. В качестве показателя противоречивости часто берется количество нетранзитивных троек. Для сравнений с ничьими целесообразно приписывать тройкам различного вида разные веса [2]. Представляет интерес выяснение связи между уровнем нетранзитивности матрицы и положением соответствующей точки в многограннике M. Впрочем, одно и то же распределение очков может достигаться при различных числах нетранзитивных троек, поэтому задачу имеет смысл формулировать следующим образом. Для каждой матрицы парных сравнений рассмотрим матрицу с тем же распределением очков и максимальным числом ничьих. В этой матрице нетранзитивные тройки могут быть только третьего вида. Как связано их число с положением соответствующей точки в многограннике? Возможна также другая постановка задачи. Назовем *правильной* матрицу X, удовлетворяющую условиям: если $x_{ij} = 1$, то $x_{ik} = 1$ для всех k, таких что $s_j \geq s_k$, и $x_{kj} = 1$ для всех k, таких что $s_k \geq s_i$. Правильные матрицы возникают, например, при попарном взвешивании n предметов на чашечных весах с ограниченной чувствительностью. Какие точки соответствуют правильным матрицам?

3. Оценка согласованности экспертов между собой и выделение подгрупп согласованных экспертов. Геометрическая интерпретация близости экспертов даст новые инструменты для решения этих задач.

4. В ряде исследований эксперту при сравнении двух объектов предлагалось не только ответить, какой из них предпочтительнее, но и указать степень этого предпочтения. В этом случае элементы матрицы X могут принимать не три, а большее число значений. Построение и содержательная интерпретация геометрических образов таких матриц могли бы стать подтверждением перспективности предложенного подхода.

Литература.

1. Заславский А.А. Геометрия парных сравнений. Автоматика и телемеханика, 2007, N 3.

2. Заславский А. А. О логичных и нелогичных турнирах.// Квант. 1997. №5. С.11-13.