Как разделить многоугольник

А.Заславский

Пусть дан выпуклый n-угольник. Будем называть *хорошими* прямые, которые делят его площадь и периметр в одном и том же отношении. Из соображений непрерывности нетрудно понять, что для любой точки P на границе многоугольника существует такая точка Q, что прямая PQ — хорошая. Наша цель — исследовать множество хороших прямых, т.е. построить кривую, которой все эти прямые касаются (*огибающую*). Для $n = 3$ решение этой задачи хорошо известно. Например, оно приводится в "Задачнике по планиметрии"И.Ф.Шарыгина. Основные результаты, позволяющие решить задачу для $n = 4$, получили N.Dergiados (Греция) и F.Rideau (Франция). Полное решение для $n > 5$, по-видимому, неизвестно.

1 Вводные задачи

В этом разделе собраны достаточно простые задачи, которые, тем не менее, оказываются полезными при исследовании общей проблемы.

1. Докажите, что прямая делит площадь и периметр треугольника в одном и том же отношении тогда и только тогда, когда она проходит через центр вписанной в него окружности.

2. Постройте прямую, делящую площадь и периметр треугольника пополам.

3. Пусть существуют хорошие прямые, пересекающие соседние стороны многоугольника. Докажите, что все они проходят через одну точку.

4. Пусть даны две прямые l, l' и взаимно однозначное соответствие f между ними. Докажите, что если f сохраняет двойные отношения точек, то все прямые, соединяющие пары соответствующих точек, касаются некоторой коники или проходят через одну точку.

5. а) Пусть дан четырехугольник $ABCD$ и точка P на стороне AB. Постройте на стороне CD такую точку Q, что прямая PQ — хорошая, или докажите, что такой точки не существует.

   б) Пусть дан n-угольник $A_1 \dots A_n$ и точка P на стороне A_1A_2. Постройте на стороне A_kA_{k+1} такую точку Q, что прямая PQ — хорошая, или докажите, что такой точки не существует.

6. Рассмотрим все хорошие прямые, пересекающие одни и те же стороны многоугольника. Докажите, что полученное соответствие между прямыми, содержащими эти стороны, сохраняет двойные отношения.

7. Рассмотрим все хорошие прямые, пересекающие одни и те же не соседние стороны многоугольника. При каких условиях они проходят через одну точку?

8. Докажите, что если многоугольник описан около окружности, то прямая является хорошей тогда и только тогда, когда она проходит через центр этой окружности.

2 Основные задачи

В этом разделе исследуются хорошие прямые выпуклого четырехугольника $ABCD$. Во всех задачах S — площадь четырехугольника, p — полупериметр, $r = S/p$.

9. Пусть A' — точка на биссектрисе угла A, расстояние от которой до сторон AB, AD равно r. Аналогично определим точки B', C', D'. Докажите, что

   а) четырехугольники $ABCD$ и $A'B'C'D'$ противоположно ориентированы,

   б) соответствующие стороны этих четырехугольников параллельны,

   в) $A'C' \parallel BD$, $B'D' \parallel AC$.

10. Докажите, что если обе диагонали четырехугольника — хорошие прямые, то четырехугольник — параллелограмм.

11. Пусть лучи BA и CD, DA и CB пересекаются. Докажите, что точки C', A', C лежат по одну сторону от прямой BD.

12. Пусть выполнены условия предыдущей задачи. Выясните, как устроено множество хороших прямых, если

    а) точки B', D' лежат по ту же сторону от прямой AC, что и точка B;

    б) точки B', D' лежат на AC.

13. Выясните, как устроено множество хороших прямых для трапеции.

3 Дополнительные задачи

В первой из приведенных в этом разделе задач наибольший интерес представляет классификация n-угольников по возможным типам огибающих хороших прямых. Например, неясно, при каких условиях существуют хорошие прямые, пересекающие соседние стороны многоугольника. Про вторую задачу мне не известно ничего.

14. Как может быть устроено множество хороших прямых для выпуклого n-угольника?

15. Как может быть устроено множество хороших прямых для гладкой выпуклой фигуры?