РИСОВАНИЕ ГРАФОВ НА ПОВЕРХНОСТЯХ

Ю.М.БУРМАН

Рассмотрим граф из двух вершин, A и B, соединенных тремя ребрами, p, q и r. Изобразим его на плоскости так, чтобы ребра не пересекались. Будем обходить вокруг вершины A по часовой стрелке и записывать, какие ребра нам встретились — например, p, затем q, затем r. Теперь проделаем ту же процедуру с вершиной B. Нетрудно видеть, что порядок ребер в этом случае будет другим: если начали с ребра p, то следом будет r, а потом q (см. рис. 1).

Возникает вопрос, можно ли данный граф нарисовать по-другому, так чтобы при обходе вокруг вершин A и B по часовой стрелке ребра появлялись в одном и том же порядке? Кажется очевидным, что это невозможно, однако попробуем. Расположим граф как-нибудь в пространстве и возьмем резиновый круг — из него будем клеить то, на чем нарисован граф. Приклеим часть границы круга к ребру p, двигаясь от вершины A к вершине B. Поскольку следующее при обходе ребро — q, следующую часть границы приклеим к q, двигаясь от B к A. Следующее ребро — r, приклеим к нему; мы опять оказались в вершине B. После r опять идет p (обход делается по циклу) — приклеим очередную часть границы круга к нему “с другой стороны”, соединив ее с той частью границы круга, которая приклеивалась к ребру p раньше. Затем — вторично ребро q, вторично ребро r, и процесс закончен. Теперь граф нарисован на резиновой пленке, и порядок ребер при обходе по часовой стрелке вокруг каждой из вершин одинаков — p, q, r. Однако в отличие от предыдущей картинки пленка представляет собой не плоскость, а тор — поверхность бублика (см. рис. 2).

Таким же образом можно было получить и картинку на рис. 2, в котором циклические порядки в вершинах A и B различные; при этом, правда, потребуется не один круг, а три. А именно, возьмем первый круг и приклеим часть его границы к ребру p, двигаясь от A к B. В точке B следующее по часовой стрелке ребро — r; приклеим следующий участок границы к нему, двигаясь к A. В точке A за ребром r следует по часовой стрелке ребро p — таким образом, процесс приклейки круга закончился. При этом в графе остались остались еще не заклеенные ребра; возьмем второй круг и приклеим его, например, к ребру q; тогда следующее ребро (в точке B) будет p (с обратной стороны), а потом

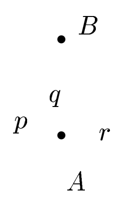

Рис. 1. Граф на плоскости

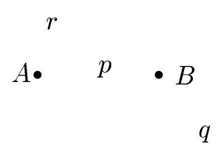

Рис. 2. Граф на торе

опять q — круг приклеен. Третий круг заклеивает дырку между ребрами q и r; таким образом, три круга склеиваются в сферу.

Подобную процедуру склейки кругов можно применять к произвольному графу с любым циклическим порядком ребер в каждой вершине; при склейке будут получаться различные поверхности. Можно показать, что эти поверхности всегда будут "сферами с ручками". Сфера с g ручками, для некоторого целого неотрицательного числа g, получается так: берется обычная сфера, в ней проделывается g дырок и к каждой приклеивается "ручка" — тор с вырезанной дыркой.

Как понять, какое именно количество ручек получится? Прежде всего, оно связано с количеством кругов, которое понадобится склеить для получения поверхности (или, что то же самое, с количеством "граней" — кусков, на которые распадется поверхность, если ее разрезать по нарисованному графу):

Теорема 1. *Пусть в графе V вершин и E ребер, а поверхность получена (описанным выше способом) склеиванием F кругов и представляет собой сферу с g ручками. Тогда $V - E + F = 2 - 2g$.*

Во-вторых, количество ручек можно определить напрямую по графу и циклическому порядку вершин. Напомним, что перестановкой элементов конечного множества $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ называется правило (отображение) σ, сопоставляющее каждому элементу $k \in M$ элемент $\sigma(k) \in M$ так, что если элементы k и l различны, то элементы $\sigma(k)$ и $\sigma(l)$ тоже различны.

Разделим каждое ребро графа пополам на два полуребра; каждое полуребро примыкает к одной вершине графа. Занумерум полуребра: $1, 2, \ldots, 2E$. Рассмотрим на множестве полуребер две перестановки, τ и σ. Перестановка τ меняет местами полуребра, принадлежащие одному ребру исходного графа (для всех ребер одновременно). Перестановка σ переводит каждое полуребро x в полуребро с концом в той же вершине, следующее за x в циклическом порядке. Сделаем теперь две перестановки — сначала τ, потом σ (это называется композицией перестановок и обознчается $\tau\sigma$). Тогда получится (проверьте!) перестановка, переводящая каждое полуребро x в полуребро, лежащее на границе той же грани, что и x, и следующее за x при обходе грани против часовой стрелки. Тем самым можно посчитать количество граней: нужно начать с произвольного полуребра x_1; перестановка $\tau\sigma$ переводит его в полуребро x_2, его — в x_3, и так далее, пока не получим опять x_1. Это одна грань; теперь возьмем полуребро y_1, которое мы еще не получили, и применим к нему тот же процесс; получим вторую грань, и т.д.

Пусть теперь дан произвольный граф Г. Будем рассматривать всевозможные циклические порядки ребер в его вершинах; каждому порядку сопоставим описанным выше способом поверхность. Обозначим $N_g(\Gamma)$ количество циклических порядков, при которых поверхность является сферой с g ручками. Вычисление чисел $N_g(\Gamma)$ — важная и интересная задача.

Задача 1. Докажите, что если граф Γ — дерево с n вершинами, то $N_g(\Gamma) = 0$ при всяком $g > 0$ (т.е. из дерева всегда получается сфера).

Задача 2. Докажите аналогичное утверждение для произвольного связного графа, из которого можно удалить одно ребро так, что получится дерево.

Задача 3. Найдите числа $N_g(\Gamma)$, где граф Γ это а) граф с двумя вершинами и тремя ребрами, описанный в начале этого текста; б) граф с одной вершиной и двумя ребрами-петлями в ней; в) граф с двумя вершинами и тремя ребрами: по одной петле в каждой вершине и одно ребро, соединяющее вершины; г) граф с одной вершиной и тремя ребрами-петлями в этой вершине; д) граф с одной вершиной и n ребрами-петлями в этой вершине.

Задача 4. Попробуйте вычислить $N_g(\Gamma)$ еще для каких-нибудь графов Γ. Если заметите какие-либо закономерности, докажите их.

Задача 5. Как меняется $N_g(\Gamma)$, если в графе Γ удалить ребро? А если стянуть ребро?

Независимый Московский Университет
E-mail address: burman@mccme.ru