Задача Борсука о разбиении множеств на части меньшего диаметра

А.М. Райгородский

1 Определения и обозначения

Назовем *диаметром* множества Ω на плоскости величину

$$\operatorname{diam}\Omega = \sup_{\mathbf{x},\mathbf{y}\in\Omega} |\mathbf{x}-\mathbf{y}|.$$

Здесь

$$|\mathbf{x}-\mathbf{y}| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}, \quad \mathbf{x}=(x_1,x_2), \quad \mathbf{y}=(y_1,y_2),$$

т.е. это обычное "евклидово" расстояние между точками на плоскости. Значок "sup" – это значок "супремума" (точной верхней грани), и при желании можно считать, что речь идет просто о максимуме. По сути, диаметр множества – это максимум расстояний между его точками. Почему мы все-таки пишем не всем понятный супремум? А потому, что бывают множества, в которых обычный максимум расстояний не достигается. Например, возьмем круг без границы (удалим из круга ограничивающую его окружность). Ну да все это детали. Будем преполагать, что все наши множества "замкнуты" (содержат свою границу), и тогда надобность в супремуме отпадет.

Рассмотрим произвольное ограниченное множество Ω. Можно считать, что $\operatorname{diam}\Omega = 1$ (при необходимости сожмем или раздуем множество с помощью гомотетиии). Хочется как можно экономнее разбить Ω на части строго меньшего диаметра. Иными словами, мы хотим представить Ω в виде

$$\Omega = \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_f$$

с условием $\operatorname{diam}\Omega_i < \operatorname{diam}\Omega$ для каждого i. При этом f мы стремимся минимизировать. Можно представлять себе Ω как некий неправильной формы торт, который целиком к нам в рот не лезет, но который по жадности своей мы желаем съесть за наименьшее количество "укусов". Вот и нужно нам так разрезать торт на куски, чтобы этих кусков было мало и чтобы в рот они к нам все-таки лезли.

Основной вопрос: какой торт хуже всех с точки зрения описанной выше задачи о разрезании на куски? Иначе говоря, на сколько кусков мы заведомо любой торт разделим?

К. Борсук в 1933 году формализовал указанную задачу так: каково наименьшее число $f(2)$, такое, что любое ограниченное множество Ω на плоскости допускает разбиение на $f(2)$ частей меньшего диаметра? Разумеется, Борсук размышлял не в терминах скорейшего поедания "кривых" тортов, да и вообще, мотивировкой для него служила топологическая проблематика. Подробную и, кстати, весьма интригующую историю задачи можно найти в книге [1].

Еще вопрос: почему мы пишем $f(2)$? А дело в том, что плоскость у нас двумерная. На самом деле, Борсук ставил аналогичную задачу и на прямой (соответствующая величина – $f(1)$), и в пространстве любой размерности. Обычно пространство размерности n обозначают через $\mathbb{R}^n$. В частности, $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ – это прямая, $\mathbb{R}^2$ – плоскость, $\mathbb{R}^3$ – пространство в стандартном школьном смысле, т.е. трехмерное простанство, в котором мы живем. В общем случае $f(n)$ – это *число Борсука*, равное такому наименьшему f, что всякое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$ можно разбить на f частей меньшего диаметра, но существует ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, которое на $f-1$ частей меньшего диаметра не разбивается. При этом расстояния в $\mathbb{R}^n$ меряются стандартно ("по Евклиду"):

$$|\mathbf{x}-\mathbf{y}| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}, \quad \mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n), \quad \mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_n).$$

Борсук предположил, что $f(n) = n+1$. Это предположение называется *гипотезой Борсука.* Гипотезу с треском опровергли в 1993 году (см. [1], [2]), но осталась куча вопросов, на которые по-прежнему нет ответов.

В следующих разделах мы приведем задачи проекта. Постепенно мы выйдем и на интересные нерешенные проблемы, в которых, однако, вполне возможны серьезные продвижения и на школьном уровне.

2 Упражнения и задачи

Упражнение 1. Докажите, что $f(1) = 2$.

Упражнение 2. Докажите, что $f(2) \geq 3$. Иными словами, приведите пример множества на плоскости, которое на две части меньшего диаметра не разбивается.

Упражнение 3. Разбейте квадрат на части меньшего диаметра.

Упражнение 4. Докажите, что $f(3) \geq 4$.

Упражнение 5. Разбейте круг радиуса 1/2 на 3 части меньшего диаметра.

Упражнение 6. Разбейте круг радиуса 1/2 на 3 части, диаметры которых не превосходят величины $\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866...$

Упражнение 7. Докажите, что константа $\frac{\sqrt{3}}{2}$ из упражнения 6 неулучшаема, т.е. при любом разбиении круга радиуса 1/2 на 3 части найдется часть, диаметр которой не меньше $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Назовем *универсальной покрышкой* в $\mathbb{R}^n$ такое множество Ω, что для любого множества Φ диаметра 1 в $\mathbb{R}^n$ существует движение пространства, переводящее Φ внутрь Ω. Иными словами, Φ можно так подвинуть, что Ω целиком его покроет. Например:

Упражнение 8. Докажите, что квадрат со стороной 1 является универсальной покрышкой на плоскости.

Упражнение 9. Докажите, что куб со стороной 1 является универсальной покрышкой в пространстве любой размерности. При этом n-мерным кубом со стороной 1 мы просто считаем множество точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, у которых $x_i \in [0, 1]$ для каждого i.

Известно, что правильный шестиугольник Ω_6 с расстоянием 1 между параллельными сторонами является универсальной покрышкой. Подробное доказательство этого (не вполне тривиального) факта можно найти в книге [3]. Можете, однако, подумать над этим самостоятельно.

Упражнение 10. Разбейте правильный шестиугольник Ω_6 на 3 части диаметра $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Выведите отсюда справедливость гипотезы Борсука на плоскости, а также, в определенном смысле, "неулучшаемость" константы $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Упражнение 11. Что играет роль константы из упражнения 10 в случае прямой?

Задача 1. Докажите, что круг радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$ является универсальной покрышкой на плоскости.

Упражнение 12. Объясните, почему круг радиуса $r < \frac{1}{\sqrt{3}}$ не может быть универсальной покрышкой.

Упражнение 13. Объясните, почему результат задачи 1 не позволяет сходу доказать гипотезу Борсука на плоскости.

Упражнение 14. Возьмем на плоскости круг B_1 радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Поставим произвольную точку на его границе и рассмотрим круг B_2 радиуса 1 с центром в этой точке. Докажите, что $B_1 \cap B_2$ – универсальная покрышка на плоскости.

Упражнение 15. С помощью результата упражнения 14 докажите гипотезу Борсука.

Упражнение 16. Можно ли с помощью результата упражения 14 доказать, что каждое множество на плоскости разбивается на три части диаметра $\leq \frac{\sqrt{3}}{2}$? Какая наилучшая константа такого типа у Вас получается?

Назовем *универсальной покрывающей системой (упс)* в $\mathbb{R}^n$ любую совокупность множеств $\{S_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, обладающих тем свойством, что для всякого $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\operatorname{diam} \Omega = 1$, существует движение, переводящее Ω внутрь хотя бы одного из множеств S_α.

Упражнение 17. Рассмотрим правильный шестиугольник Ω_6 с расстоянием 1 между параллельными сторонами. Возьем отрезок, соединяющий центр шестиугольника с одной из его вершин, и проведем прямую, перепендикулярную этому отрезку, на расстоянии 1/2 от центра. Прямая отсечет от шестиугольника треугольник. Докажите, что шестиугольник без указанного треугольника также служит универсальной покрышкой на плоскости. Этот усеченный шестиугольник обозначен Ω_6' на рисунке 1.

Упражнение 18. Докажите, что средний и правый шестиугольники с рисунка 1 образуют упс. Треугольники, как и в упражнении 17, отсекаются прямыми, которые перпендикулярны отрезкам, соединяющим центр шестиугольника с соответствующими вершинами, и проходят на расстоянии 1/2 от центра.

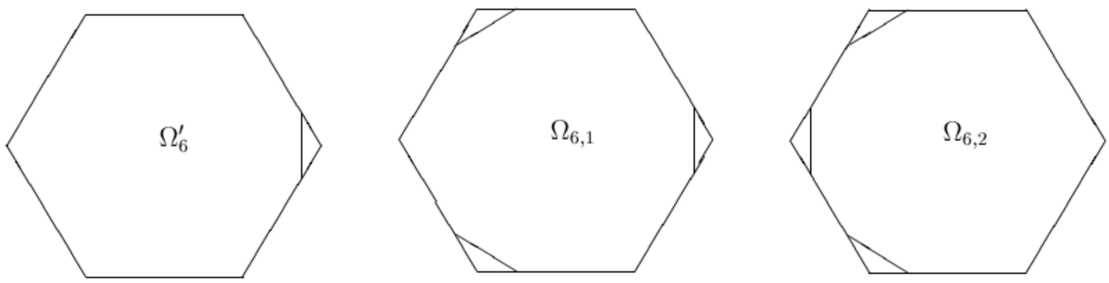

Рисунок 1:

Задача 2. Докажите, что любое множество диаметра 1 на плоскости можно разбить на 5 частей, в каждой из которых нет пары точек, отстоящих друг от друга на расстояние $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **Указание.** Используйте Ω_6.

Задача 3. Можно ли доказать, что при некотором $a < \frac{1}{\sqrt{3}}$ любое множество диаметра 1 на плоскости разбивается на 5 частей, в каждой из которых нет пары точек, отстоящих друг от друга на расстояние a?

Задача 4. Докажите, что всякое множество диаметра 1 на плоскости разбивается на 6 частей, диаметры которых не превосходят величины $\sqrt{\frac{13}{3}}(2 - \sqrt{3}) = 0.5577...$ **Указание.** Используйте упс $\{\Omega_{6,1}, \Omega_{6,2}\}$.

Задача 5. А еще лучше, чем в задаче 4?

Задача 6. Докажите, что всякое множество диаметра 1 на плоскости разбивается на 5 частей, диаметры которых не превосходят величины 0.603. **Указание.** Используйте покрышку Ω_6'.

Задача 7. А еще лучше, чем в задаче 6?

Задача 8. Докажите, что всякое множество диаметра 1 на плоскости разбивается на 8 частей, диаметры которых не превосходят величины 0.446. **Указание.** Используйте покрышку Ω'_6.

Задача 9. А еще лучше, чем в задаче 8?

Задача 10. Докажите, что всякое множество диаметра 1 на плоскости разбивается на 9 частей, диаметры которых не превосходят величины 0.421. **Указание.** Используйте покрышку Ω_6.

Задача 11. Докажите, что всякое множество диаметра 1 на плоскости разбивается на 10 частей, диаметры которых не превосходят величины 0.405. **Указание.** Используйте покрышку Ω_6.

Задача 12. Докажите, что всякое множество диаметра 1 на плоскости разбивается на 12 частей, диаметры которых не превосходят величины 0.367. **Указание.** Используйте покрышку Ω_6.

Задача 13. А еще лучше, чем в задаче 10?

Задача 14. А еще лучше, чем в задаче 11?

Задача 15. А еще лучше, чем в задаче 12?

Задача 16. Докажите, что всякое множество диаметра 1 на плоскости разбивается на 4 части, диаметры которых не превосходят величины $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Задача 17. Докажите неулучшаемость результата задачи 16.

Задача 18. Докажите, что всякое множество диаметра 1 на плоскости разбивается на 7 частей, диаметры которых не превосходят величины $\frac{1}{2}$.

Задача 19. Докажите неулучшаемость результата задачи 18.

Задача 20. Докажите, что шар радиуса $\sqrt{\frac{3}{8}}$ является универсальной покрышкой в $\mathbb{R}^3$.

Задача 21. Объясните, почему шар радиуса $r < \sqrt{\frac{3}{8}}$ не является универсальной покрышкой в $\mathbb{R}^3$.

Задача 22. Разбейте шар радиуса $1/2$ в пространстве на 4 части меньшего диаметра (т.е. диаметры частей должны быть меньше 1).

Задача 23. Впишем в шар радиуса 1/2 правильный тетраэдр. Рассмотрим 4 трехгранных угла, которые получаются, если соединять центр шара с вершинами граней тетраэдра. Пересечем каждый из углов с шаром. Получится разбиение шара на 4 одинаковых части. Найдите диаметры этих частей.

Задача 24. Назовем *правильным симплексом* в $\mathbb{R}^n$ аналог правильного треугольника на плоскости и правильного тетраэдра в пространстве. А именно, рассмотрим $n+1$ точек $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n+1}$ в $\mathbb{R}^n$, обладающих тем свойством, что $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| = a$ для всех пар $i \neq j$ и некоторого $a > 0$. Докажите, что симплекс существует.

Задача 25. Назовем n-мерным шаром множество

$$B = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) : \ x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leq 1\}.$$

Это шар радиуса 1 и диаметра 2. Впишем в этот шар правильный симплекс. Найдите длину его стороны.

Задача 26*. Осуществим разбиение шара из задачи 25, аналогичное разбиению из задачи 23. А именно, впишем в шар правильный симплекс с длиной стороны, найденной в задаче 25, и рассмотрим многогранные углы с вершиной в центре шара, проходящие через грани симплекса (граней $n+1$). Найдите диаметры полученных частей. В частности, убедитесь, что они меньше 1 и что их величины стремятся к 1 при $n \to \infty$.

Упражнение 19. Возьмем шар B_1 радиуса $\sqrt{\frac{3}{8}}$ и пересечем его с произвольным шаром B_2 радиуса 1, центр которого расположен на границе шара B_1. Докажите, что $B_1 \cap B_2$ – универсальная покрышка.

Задача 27. Докажите, что $B_1 \cap B_2$ разбивается на 5 частей диаметра меньше 1.

Задача 28*. Докажите, что $B_1 \cap B_2$ разбивается на 5 частей диаметра

$$\sqrt{\frac{35 + \sqrt{73}}{48}} = 0.9524...$$

Указание. Считая, что B_1 имеет центр в начале координат, а B_2 – в точке $\left(0, 0, \sqrt{\frac{3}{8}}\right)$, проведите плоскости $z = a$, $x = 0$, $y = 0$ и выберите a оптимально.

Задача 29*. Попробуйте уточнить константу 0.9524... (**КОНКУРС!**)

Задача 30*. Можно ли разбить $B_1 \cap B_2$ на 4 части диаметра меньше 1?

Известно, что универсальной покрышкой в $\mathbb{R}^3$ служит правильный октаэдр с расстоянием 1 между параллельными гранями. Доказательство этого факта можно найти в [3]. Можно подумать и самостоятельно, хотя аккуратное рассуждение требует определенного навыка.

Упражнение 20. Возьмем правильный октаэдр $\mathcal{O}$ с расстоянием 1 между параллельными гранями и центром в начале координат. Проведем три плоскости на расстоянии $1/2$ от центра октаэдра, перепендикулярные осям x, y и z соответственно. Они отсекут три пирамиды от октаэдра. Докажите, что полученный усеченный октаэдр $\mathcal{O}'$ – универсальная покрышка.

В книге [3] описано разбиение $\mathcal{O}'$ на 4 части диаметра 0.9887... Можете попробовать самостоятельно осуществить такое разбиение. Следует иметь в виду, что диаметр любого многогранника достигается на парах его вершин. В итоге гипотеза Борсука подтверждена и в $\mathbb{R}^3$. Однако тут нет аналога константы $\frac{\sqrt{3}}{2}$, которую мы нашли для случая плоскости (см. упражнение 10), и константы, которую Вы наверняка нашли для случая прямой (см. упражнение 11). Мы лишь знаем, что такая константа не превосходит 0.9887... Крайне важны улучшения последней оценки. Займемся ими.

Задача 31 (исследовательская). Рассмотрим октаэдр $\mathcal{O}$ из упражнения 20. Зафиксируем положительные числа $r_1, \ldots, r_6$ и проведем 6 плоскостей $\Pi_1, \ldots, \Pi_6$. А именно, плоскости Π_1, Π_2 перпендикулярны оси x, плоскости Π_3, Π_4 перпендикулярны оси y, и плоскости Π_5, Π_6 перпендикулярны оси z. При этом r_i – это расстояние от начала координат до плоскости Π_i. Если r_i не превосходит расстояния от центра октаэдра до его вершины на соответствующей оси (модуля координаты этой вершины), то Π_i отсекает некоторую пирамиду от $\mathcal{O}$. Иначе – ничего не отсекает. В результате всех отсечений получаем $\mathcal{O}(r_1, \ldots, r_6)$. Например, при $r_1 = r_3 = r_5 = 1/2$ и при любых достаточно больших r_2, r_4, r_6 имеем $\mathcal{O}(r_1, \ldots, r_6) = \mathcal{O}'$. Исследование состоит в следующем. Хочется описать совокупности множеств вида $\mathcal{O}(r_1, \ldots, r_6)$, которые образуют упс (в упс может быть сколь угодно много элементов). Хочется, далее, выбрать такую из этих упс, что каждое множество в ней экономно разбивается на 4 части. По-видимому, на этом пути можно улучшить константу 0.9887 до чего-то существенно меньшего – скажем, до 0.97. До чего?

По сути, требуется научиться мастерски разбивать множества $\mathcal{O}(r_1, \ldots, r_6)$ на 4 части с наименьшими возможными диаметрами, а затем выискивать такие совокупности этих множеств, которые образуют упс и в которых каждое множество наиболее мастерски разбито. Участие компьютера не воспрещается, но, коль скоро упс, гарантирующая константу 0.97 (или типа того), найдена, разбиение каждого ее элемента должно быть строго описано и диметры его частей должны быть считаемы "вручную".

Объявляется **КОНКУРС**: кто меньше?!

Для дальнейших исследований нам понадобится *ромбододекаэдр*. Картинки с его изображением можно найти в книгах [1] и [4]. Там же говорится и об определении. Можно сказать, например, так: ромбододекаэдр – это многогранник, двойственный к кубооктаэдру, который, в свою очередь, является выпуклой оболочкой середин ребер обычного куба. Если не ясно, спрашивайте!

Обозначим через $\mathcal{R}$ такой ромбододекаэдр, что каждая из координатных плоскостей проходит через его центр и 4 его вершины. Теперь рассмотрим три взаимно перпендикулярные плоскости, параллельные координатным плоскостям и отстоящие от этих плоскостей на расстояние $1/2$. Они отсекут от $\mathcal{R}$ три кусочка. Обозначим остающийся после отсечения этих кусочков многогранник через $\mathcal{R}'$. Это полный аналог усеченного октаэдра. Оказывается, $\mathcal{R}'$ является универсальной покрышкой. Это сложный факт, в который предлагается поверить. Для понимания деталей доказательства требуются глубокие знания в области алгебраической топологии. Получено доказательство было только в 1997 году. В оригинальной статье написано, что с помощью компьютера многогранник $\mathcal{R}'$ можно разбить на 4 части, диаметры которых не превосходят 0.97. Однако ни самого разбиения, ни даже программы, которая его выдает, в статье не предъявлено.

Задача 32. Найдите оптимальное разбиение усеченного ромбододекаэдра на 4 части. Искать можно с помощью компьютера, но в конечном счете надо явно указать координаты вершин многогранников, на которые разбивается $\mathcal{R}'$.

Задача 33 (исследовательская). Определим $\mathcal{R}(r_1, \dots, r_6)$ точно так же, как в задаче 31 мы определили $\mathcal{O}(r_1, \dots, r_6)$. Идея та же, что и в задаче 31. Следует думать, что здесь оценки будут еще лучше. Прогноз – 0.95 или типа того. (**КОНКУРС!**)

Уже для размерности 4 справедливость гипотезы Борсука не установлена.

Упражнение 21. Докажите, что $f(4) \geq 5$. Вообще, $f(n) \geq n+1$.

Упражнение 22. Постройте покрышку в $\mathbb{R}^4$, аналогичную покрышкам из упражнений 14 и 19.

Задача 34. Докажите, что покрышка из упражнения 22 разбивается на 9 частей диаметра меньше 1 и что, стало быть, $f(4) \leq 9$.

Проблема 1. Уточните оценку $f(4) \leq 9$. Надо упорно строить всяческие упс.

Задача 35. Постройте покрышку в $\mathbb{R}^n$, аналогичную покрышкам из упражнений 14, 19 и 22.

Задача 36. С помощью покрышки из задачи 35 докажите, что $f(n) \leq 2^{n-1} + 1$.

Сейчас гипотеза Борсука опровергнута при всех $n \geq 298$. Однако ситуация для размерностей $n \in [4, 297]$ покрыта почти полным мраком. Есть идеи, как можно опровергнуть гипотезу при всех $n \geq 170$. По сути, эти идеи содержатся в проекте "Экстремальные системы множеств и векторов".

Список цитированной литературы

[1] А.М. Райгородский, *Проблема Борсука*, Москва, МЦНМО, 2006.

[2] А.М. Райгородский, *Линейно-алгебраический метод в комбинаторике*, Москва, МЦНМО, 2007.

[3] В.Г. Болтянский и И.Ц. Гохберг, *Теоремы и задачи комбинаторной геометрии*, Москва, "Наука", 1965.

[4] А.М. Райгородский, *Хроматические числа*, Москва, МЦНМО, 2003.