ГРАФЫ И ПЕРЕСТАНОВКИ

Ю.М. БУРМАН

1. Общее описание ситуации и предварительные задачи

Пусть G — граф с n вершинами и k ребрами, причем вершины пронумерованы числами от 1 до n, а ребра — числами от 1 до k. Также имеется n фишек с номерами от 1 до n. Первоначально каждая фишка стоит в вершине графа с тем же номером. Затем фишки, стоящие на концах ребра номер 1, меняются местами. Затем то же самое происходит с фишками, стоящими на концах ребра номер 2, ребра номер 3, и т.д. После k операций возникает некоторая соответствие σ_G между номерами фишек и номерами вершин, в которые они попали (фишка номер i стоит теперь в вершине номер $\sigma_G(i)$). Это соответствие является перестановкой, то есть для каждого $j = 1, \dots, n$ существует ровно одно число $i = 1, \dots, n$ такое, что $\sigma_G(i) = j$ (в каждой вершине стоит ровно одна фишка).

Хорошо известно, что всякую перестановку σ можно представить в виде объединения непересекающихся циклов. А именно, рассмотрим фишку номер $i_1 = 1$. Она стоит в вершине номер $i_2 = \sigma(i_1)$. Фишка номер i_2 стоит в вершине номер $i_3 = \sigma(i_2)$, фишка номер i_3 — в вершине номер $i_4 = \sigma(i_3)$, и т.д. Поскольку вершин конечное число, рано или поздно в последовательности $i_1, i_2, i_3, \dots$ повторится число, которое встречалось раньше.

Задача 1. Докажите, что если $i_p = i_q$, то $i_{p+1} = i_{q+1}$, $i_{p+2} = i_{q+2}$, и т.д. (т.е. если число повторилось, то и дальше все будет повторяться).

Задача 2. Докажите, что первым числом, которое повторится в последовательности, будет число $i_1 = 1$.

Тем самым, начав с $i_1 = 1$, мы получим некоторую последовательность $i_1, \dots, i_m$ номеров вершин, обладающую следующим свойством: числа в ней не повторяются, и фишка номер i_p стоит в вершине номер $\sigma(i_p) = i_{p+1}$ для всех $p = 1, \dots, m-1$; фишка номер i_m стоит в вершине номер $\sigma(i_m) = i_1$. Может оказаться, что $m = n$, то есть в последовательности $i_1, \dots, i_m$ встречаются номера всех вершин ровно по одному разу (такая перестановка σ называется циклической). В общем случае это не так — найдется фишка j_1, в цикл не вошедшая. Тогда можно построить новую последовательность $j_2 = \sigma(j_1), j_3 = \sigma(j_2)$, и т.д. — она тоже рано или поздно зациклится: $j_1 = \sigma(j_s)$; таким образом получится еще один цикл. Если все еще имеются фишки, не вошедшие в эти два цикла — построим еще один цикл, и т.д., пока запас фишек (и вместе с ними вершин графа) не закончится. Заметим, что в процессе построения могут встретиться циклы длины 1: это означает, что $\sigma(\ell) = \ell$ для некоторого ℓ, т.е. фишка номер ℓ стоит в вершине с тем же номером.

Задача 3. Очевидно, что в приведенной процедуре построения циклов перестановки σ имеется неоднозначность: не обязательно начинать с фишки $i_1 = 1$;

если цикл не один — тогда есть много возможностей выбора фишки j_1, и т.д. Докажите, что циклы $i_1, \dots, i_m$, $j_1, \dots, j_s$, и т.д., не зависят от этого произвола, а только от самой перестановки σ (циклы могут появляться в различном порядке, но их длины, входящие в них фишки и *циклический* порядок фишек в каждом цикле определены однозначно).

Задача 4. Сколько имеется различных циклических перестановок n фишек?

Задача 5. Сколько имеется различных перестановок n фишек, для которых получается p циклов длиной $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ (разумеется, $\lambda_1 + \dots + \lambda_p = n$)?

В дальнейшем мы будем исследовать циклы перестановки σ_G для различных графов G с нумерованными вершинами и ребрами. Напомним, что в графе n вершин и k ребер; количество циклов в перестановке σ_G обозначим p.

Задача 6. Возьмем произвольный граф G и сотрем в нем одно ребро; пусть это ребро номер i. Все остальные ребра оставим на месте; у всех ребер с номерами, большими i, уменьшим их номера на единицу (чтобы оставшиеся ребра по-прежнему нумеровались подряд). Полученный граф с нумерованными ребрами обозначим G'.

Докажите, что количество циклов в перестановке $\sigma_{G'}$ равно $p+1$ или $p-1$. От чего зависит, плюс или минус?

Задача 7. Докажите, что для любого графа G число $n+k+p$ является четным.

2. Основные задачи

Пусть G — дерево, то есть связный граф, не содержащий циклов (иными словами, G это такой граф, что любые две его вершины можно соединить единственным путем, проходящим по ребрам без повторений).

Задача 8. Докажите, что число ребер дерева с n вершинами равно $n-1$.

Задача 9. Пусть G — дерево. Докажите, что перестановка σ_G — циклическая.

Пусть G — дерево, причем $\sigma_G = (12 \dots n)$ (т.е. фишка номер 1 попадает в вершину номер 2, и т.д.). Нарисуем окружность, на которой расставим последовательно по часовой стрелке точки $1, 2, \dots, n$. Теперь если в графе имеется ребро, соединяющее вершины i и j, проведем в окружности хорду ij (и так для каждого ребра). На каждой хорде напишем тот же номер, который был на соответствующем ребре.

Задача 10. Докажите, что построенные хорды не пересекаются.

Задача 11. Докажите, что если к вершине номер i примыкают несколько хорд с номерами $e_1, \dots, e_m$, то номера этих хорд возрастают против часовой стрелки (напомним, что точки $1, 2, \dots, n$ расставлены по часовой стрелке).

Задача 12. Докажите, что построенные хорды разбивают круг на n частей, причем каждая часть примыкает ровно к одной дуге окружности (дуги ограничены точками $1, 2, \dots, n$).

Задача 13. Докажите обратное: пусть проведены $n-1$ хорд окружности, образующих дерево G с вершинами $1, 2, \dots, n$, причем хорды не пересекаются и для всякого i номера хорд, проходящих через точку i, возрастают против часовой стрелки. Тогда перестановка σ_G равна $(12 \dots n)$.

Пусть теперь G — дерево, вершины которого пронумерованы от 1 до n, а ребра не пронумерованы. Сопоставим дереву G систему хорд на окружности, как выше.

Задача 14. Докажите, что если хорды не пересекаются, то можно пронумеровать ребра дерева G числами от 1 до $n-1$ так, чтобы соответствующая перестановка σ равнялась бы $(12\dots n)$.

Задача 15. Нумерация ребер, упомянутая в задаче 14, не обязательно единственна. Придумайте быстрый способ подсчета количества таких нумераций для произвольного дерева.

3. Более сложные задачи

Пусть теперь G — связный граф с n вершинами и $k = n$ ребрами.

Задача 16. Докажите, что перестановка σ_G в данном случае обязательно состоит из двух циклов.

Пусть $\sigma_G = (12\dots\ell)(\ell+1\dots n)$. Нарисуем кольцо, на внешней стороне которого расположим по часовой стрелке точки $1, 2, \dots, \ell$, а на внутренней, против часовой стрелки — точки $\ell+1, \dots, n$. Нарисуем граф G в кольце, то есть для каждого ребра с концами в вершинах i и j проведем кривую, идущую внутри кольца и соединяющую точки i и j на его границе.

Задача 17. Докажите, что кривые можно нарисовать так, чтобы они не пересекались, и если точка i служит началом нескольких кривых, то их номера упорядочены против часовой стрелки, если i лежит на внешней границе, и по часовой стрелке, если на внутренней.

Задача 18. Обратно, пусть граф G с n вершинами и n ребрами нарисован внутри кольца так, как описано в задаче 17. Докажите, что в этом случае $\sigma = (12\dots\ell)(\ell+1\dots n)$.

Задача 19. Приведите пример графа с n вершинами и n ребрами, нарисованного внутри кольца так, что вершины лежат на границе кольца, а ребра не пересекаются, но при этом нельзя занумеровать ребра числами $1, 2, \dots, n$ так, чтобы ребра, примыкающие к данной вершине, были упорядочены по или против часовой стрелки, согласно правилу задачи 17.

Задача 20. Опишите, каким дополнительным условиям должен удовлетворять граф, нарисованный внутри кольца, чтобы нумерация, упомянутая в задаче 17, существовала.

Задача 21. Сформулируйте и решите аналоги задач 17–20 в случае, если граф связный, количество ребер равно $k = n+1$, а перестановка σ состоит из 3 циклов.

Задача 22. То же самое, в случае, когда k — любое число от $n-1$ до $2n-2$, а перестановка σ состоит из $k-n+2$ циклов.

Задача 23. То же самое в случае, когда $k = n+1$, а перестановка σ циклическая (для определенности, равна $(12\dots n)$).

Указание. В этом случае роль кольца будет исполнять "ручка" — тор с прорезанной дыркой, на которой нужно расположить точки $1, 2, \dots, n$.

Задача 24. То же самое для произвольного связного графа G и произвольной перестановки σ.

E-mail address: burman@mccme.ru