Инварианты графов, связанные с инвариантами узлов
Исследовательские вопросы для школьников

С.К.Ландо *

4 февраля 2008 г.

В нижеследующем тексте Упражнения — это задачи, решения которых известны, а Задачи — это вопросы, ответы на которые неизвестны.

Рассматриваются простые графы — наборы вершин, некоторые из которых соединены ненаправленными ребрами. *Инвариантом* графов называется функция на графах, принимающая одинаковые значения на изоморфных графах. Примеры инвариантов:

- число вершин в графе;
- число ребер в графе;
- число простых цепочек заданной длины ℓ (это последовательность из ℓ попарно различных ребер, в которой начало очередного ребра совпадает с концом предыдущего);
- число простых циклов заданной длины ℓ (это простые цепочки, конец которых совпадает с началом);
- *хроматический многочлен* графа (для данного графа Γ это функция от переменной t, равная количеству правильных раскрасок вершин графа Γ в t цветов; раскраска называется *правильной*, если любые две соседние вершины графа покрашены в разные цвета). Скажем, хроматический многочлен полного графа на n вершинах равен $t(t-1)(t-2)\dots(t-n+1)$;
- *число совершенных паросочетаний* в графе (для данного графа Γ это число наборов ребер в Γ, обладающих следующим свойством: любая вершина графа Γ содержится в точности в одном ребре из этого набора).

Вообще, придумать инвариант графов несложно — подойдет любая числовая характеристика структуры графа, в подсчете которой не используются ни способ представления графа (например, изображаем ли мы его на плоскости или нет), ни то, как именно обозначаем мы его вершины и ребра и обозначаем ли их вообще.

*Государственный университет — Высшая школа экономики

Упражнение 1 Самостоятельно придумайте несколько инвариантов графов.

Упражнение 2 Пусть e — произвольное ребро графа Γ. Докажите, что хроматический многочлен $\chi_\Gamma(t)$ графа Γ обладает следующим свойством

$$\chi_\Gamma(t) = \chi_{\Gamma'_e}(t) - \chi_{\Gamma''_e}(t), \tag{1}$$

где граф Γ'_e получается из графа Γ путем удаления ребра e, а граф Γ''_e есть результат стягивания ребра e: мы склеиваем концы ребра e в вершину и если при этом получаются кратные ребра, то заменяем их одним ребром.

Упражнение 3 Воспользовавшись предыдущей задачей, докажите, что хроматический многочлен это действительно многочлен от t (до сих пор это была просто какая-то функция).

Инварианты графов, удовлетворяющие соотношению (1), образуют очень интересный класс инвариантов, допускающий разнообразные описания. Нас будут интересовать инварианты графов, удовлетворяющие похожему условию.

Инвариант графов называется 4-*инвариантом*, если он удовлетворяет следующему *четырехчленному соотношению*:

$$f(\Gamma) - f(\Gamma'_{AB}) = f(\widetilde{\Gamma}_{AB}) - f(\widetilde{\Gamma}'_{AB}) \tag{2}$$

для любого графа Γ и любого ребра AB в нем. Здесь граф $\widetilde{\Gamma}_{AB}$ есть результат удаления ребра AB из графа Γ, а граф $\widetilde{\Gamma}_{AB}$ получается из графа Γ следующим образом. Рассмотрим все вершины в Γ, соединенные ребром с вершиной B, и поменяем их примыкание к A на противоположное: если в Γ они соединены с A ребром, то в $\widetilde{\Gamma}$ это ребро стирается и наоборот. Обратите внимание на то, что вершины A и B играют различную роль в этом определении! Кроме того, в отличие от соотношения (1) все четыре графа в соотношении (2) имеют одинаковое количество вершин.

Упражнение 4 Докажите, что хроматический многочлен является 4-инвариантом графов.

Упражнение 5 Докажите, что остаток от деления числа циклов длины 4 на 2 является 4-инвариантом графов.

Упражнение 6 Докажите, что число совершенных паросочетаний является 4-инвариантом графов.

Упражнение 7 Придумайте несколько примеров 4-инвариантов.

В отличие от инвариантов, удовлетворяющих соотношению (1), 4-инварианты не имеют другого хорошего описания. Основная исследовательская задача состоит в том, чтобы найти такое описание.

Вот простейший и очень важный вопрос, на который нет ответа. 4-инварианты графов с данным числом n вершин, принимающие вещественные значения, образуют вещественное векторное пространство (т.е. результат сложения двух 4-инвариантов и результат умножения 4-инварианта на число также являются 4-инвариантами), которое мы обозначим через F_n. Каковы размерности этих векторных пространств?

Вот эти размерности для маленьких значений n, подсчитанные на компьютере:

n	1	2	3	4	5	6	7
$\dim F_n$	1	2	3	6	10	19	32

Упражнение 8 Проверьте результаты вычислений для $n = 1, 2, 3, 4$.

Задача 9 Как продолжить эту последовательность? Насколько быстро она растет?

4-инварианты графов допускают важную модификацию для случая так называемых *оснащенных* графов — таких, на каждой вершине которых написано число 0 или 1 (*оснащение*). Для инвариантов оснащенных графов можно написать 4-членные соотношения, аналогичные соотношению (2). Эти соотношения имеют тот же самый вид, только операцию $\Gamma \mapsto \widetilde{\Gamma}_{AB}$ нужно понимать по-другому, если оснащение вершины B равно 1. В этом случае в графе $\widetilde{\Gamma}_{AB}$ вершина A имеет оснащение, отличное от ее оснащения в Γ, и вершины A и B не соединяются ребром. Граф $\widetilde{\Gamma}'_{AB}$ получается из $\widetilde{\Gamma}_{AB}$ как результат соединения ребром вершин A и B.

Размерности пространств F_n^c 4-инвариантов оснащенных графов для графов с небольшим числом вершин вычислены на компьютере И. А. Дынниковым:

n	1	2	3	4	5
$\dim F_n^c$	2	5	11	26	58

Упражнение 10 Проверьте результаты вычислений для $n = 1, 2$.

Задача 11 Как продолжить эту последовательность? Насколько быстро она растет?

Упражнение 12 Докажите, что всякий 4-инвариант оснащенных графов определяет 4-инвариант обычных графов по следующему правилу. Расставим на вершинах данного графа с n вершинами единицы и нули всеми 2^n возможными способами. Затем сопоставим исходному графу сумму значений нашего 4-инварианта оснащенных графов по всем 2^n оснащениям, умноженных на (-1) в степени, равной количеству единиц в оснащении.

Задача 13 Верно ли, что всякий 4-инвариант обычных графов можно получить таким способом?

ЛИТЕРАТУРА

[1] С. К. Ландо, *J-инварианты орнаментов и оснащенные хордовые диаграммы*, Функ. анал. и прил., т. 40, N 1, 1–13 (2006)

[2] S. K. Lando, *On a Hopf algebra in graph theory*, J. Combin. Theory Ser. B, vol. 80, no. 1, 104–121 (2000)