ПОЛУКРУГИ НА СФЕРЕ

Панина Г.Ю.

Рассмотрим единичную сферу с центром в точке O в пространстве $\mathbb{R}^3$.

- *Большим кругом* называется пересечение сферы с плоскостью, проходящей через O.
- *Большим полукругом* называется (замкнутый) отрезок большого круга, соединяющий две диаметрально противоположные точки.
- Конечный набор **непересекающихся** больших полукругов на сфере будем называть *конфигурацией больших полукругов*.
- Две конфигурации называются *изотопными*, если существует непрерывное движение полукругов первой конфигурации (*изотопия*), переводящее ее в положение второй конфигурации.

  При таком движении полукруги могут двигаться независимо, расстояния и углы между ними могут меняться, запрещаются только пересечения.
- *Полярное множество конфигурации* – это множество полюсов соответствующих больших кругов. У каждого большого круга есть два полюса, поэтому полярное множество всегда центрально-симметрично. На рис. 1 полярное множество конфигурации – красные точки.

Все предлагаемые мною задачи – комбинаторно-геометрические – о конфигурациях больших полукругов.

Они появились из моей собственной научной деятельности (на стыке выпуклой геометрии и комбинаторной геометрии), поэтому я лично в них заинтересованна. Очень подробно об этом изложено на сайте

http://club.pdmi.ras.ru/∼panina/hyperbolicpolytopes.html

Я думаю, что для первого знакомства не нужно изучать весь сайт в подробностях, а лучше покрутить трехмерные картинки в "3D gallery".

Предлагаемые задачи разделены на три части. Первая часть – задачи для разминки. Их цель – ввести читателя в курс дела.

Вторая часть – исследовательские задачи. Ответы на них не известны, и прогресс по любой из них важен.

Практические советы.

(1) Для экспериментирования с полукругами вам пригодится программа-рисовалка на сфере. Ее можно бесплатно скачать с сайта

   http://page.mi.fu-berlin.de/schulza/

   Это удобнее и точнее, чем рисовать на резиновых мячиках (как делала я сама) или на теннисных мячах (как делал Юрий Дмитриевич Бураго).

(2) Будет еще лучше, если Вы напишете программу, позволяющую вначале разместить несколько полукругов на сфере, а затем передвигать их с помощью мышки. Такая программа была бы интересна и сама по себе.

(3) Сферический рисунок сводится к рисунку на плоскости (см. задачу 1.3). Нужно только помнить, что плоское изображение зависит от выбора плоскости e.

1. Предварительные задачи

Задача 1.1. *Пусть $\mathcal{A}$ – конфигурация больших полукругов . Продолжим их до больших кругов (см. рис. 1). Докажите, что каждая точка пересечения принадлежит ровно одному из полукругов.*

Задача 1.2. *Проверьте, что набор точек (см. рис. 2) не является полярным множеством никакой конфигурации больших полукругов.*

Задача 1.3. *Зафиксируем плоскость e, не проходящую через и спроецируем полукруги конфигурации на e (см. рис. 3). Очевидно, при этом получится набор непересекающихся лучей на плоскости (=конфигурация лучей). Какими свойствами должна обладать конфигурация лучей на плоскости, полученная из конфигурации больших полукругов?*

Задача 1.4. ** Покажите, что конфигурации $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ на рис. 4 не изотопны.*

2. Исследовательские задачи

Задача 2.1. *Изотопна ли конфигурация $\mathcal{A}_1$своему зеркальному образу (см. рис. 5)?*

Изотопна ли конфигурация $\mathcal{A}_2$ своему зеркальному образу (см. рис. 6)? (Примечание. Прием (см. решение задачи 1.4), различаюший $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ здесь не работает. Нужна другая идея.)

Задача 2.2. *Сколько существует различных конфигураций k больших полукругов? Если трудно указать точное число, то какие можно написать для него оценки?*

Задача 2.3. *Описать конфигурации, изотопные своим зеркальным образам.*

Задача 2.4. *Как можно разумно расклассифицировать конфигураций k больших полукругов?*

Задача 2.5. *Сколькими (с точностью до изотопии) способами можно расположить на сфере 5 больших полукругов?*

Задача 2.6. *Придумать (комбинаторный) инвариант, позволяющий различать неизотопные конфигурации. Один такой инвариант уже имеется – см. решение задачи 1.4.*

Задача 2.7. *Имеется центрально-симметричное конечное множество точек на сфере. Найти необходимые и достаточные условия, при которых это множество есть множество полюсов для некоторой конфигурации больших полукругов.*

Задача 2.8. *Написать программу, позволяющую вначале разместить несколько полукругов на сфере, а затем передвигать их с помощью мышки. Хочется, чтобы при таких движениях автоматически запрещались бы пересечения полукругов.*

Задача 2.9. *Вообще всякое осмысленное программирование на эту тему приветствуется.*

Задача 2.10. *Определение. Два полукруга конфигурации $\mathcal{A}$ называются близнецами, если один из этих полукругов можно непрерывным движением перевести в положение второго, не задевая других полукругов конфигурации.*

Докажите, что любая конфигурация из не менее чем четырех полукругов содержит по крайней мере две непересекающиеся пары близнецов.

Примечание. С одной стороны, у меня уже имеется решение этой задачи. Поэтому им можно пользоваться при решении других задач. С другой стороны, мое доказательство очень длинное. Было бы хорошо его укоротить.

3. Решение задачи 1.4

Пусть имеется конфигурация $\mathcal{A}$ четырех больших полукругов на сфере. Будем считать полукруги произвольно занумерованными.

Поставим конфигурации $\mathcal{A}$ в соответствие граф $\Gamma(\mathcal{A})$ по следующему правилу. Вершины графа соответствуют полукругам $\mathcal{A}$. Две вершины i и j соединены ребром тогда и только тогда, когда продолжение в ту или другую сторону одного из полукругов (i или j) прежде всего пересекает второй полукруг, а уже потом – остальные полукруги конфигурации.

Например, на рис. 7 продолжение полукруга 1 пересекает вначале полукруг 2. Значит, на графе вершины 1 и 2 соединены ребром.

Такой граф – инвариант конфигурации, он не меняется при непрерывных движениях без самопересечений. (Убедитесь в этом, воспользовавшись утверждением из задачи 1.1.)

Осталось проверить, что для двух конфигураций (рис. 4) получаются разные графы.

К сожалению, этот инвариант не различает конфигурацию и ее же зеркальный образ.

E-mail address: `panin@pdmi.ras.ru, gaiane@mail.wpus.net`