В.Ю. Протасов (МГУ)

Теоремы о замыкании и их геометрические доказательства

В геометрии широко известны теоремы о замыкании, такие как теорема Штейнера, теорема Понселе и теорема о зигзаге. Им посвящена обширная литература. Цель нашего исследования – поиск единого элементарного (в рамках "школьной" планиметрии или чуть шире) доказательства этих теорем. Я занимался этой задачей и получил такое доказательство, однако, во-первых, довольно громоздкое, а во-вторых, оно проходит только в случае одного типа расположения окружностей. Поэтому, все, кого заинтересует эта тема, приглашаются к поиску нужного доказательства. Сначала сформулируем классические теоремы о замыкании.

Процесс Штейнера. Даны окружности α_0 и α_1 (α_1 внутри α_0). Пусть $\mathcal{M}$ – множество окружностей, касающихся α_0, α_1 и лежащих между ними. Для произвольной $\gamma_1 \in \mathcal{M}$ выбирается окружность $\gamma_2 \in \mathcal{M}$, касающаяся γ_1, далее для любого $k \geq 3$ окружность $\gamma_k \in \mathcal{M}$ касается γ_{k-1} и отлична от γ_{k-2}. Процесс имеет период $n \geq 1$ если $\gamma_{n+1} = \gamma_1$.

Теорема 1 (`Теорема Штейнера`). *Если процесс Штейнера периодичен для некоторой начальной окружности γ_1, то и для любой $\gamma_1 \in \mathcal{M}$ он будет иметь тот же период.*

Процесс Понселе. Даны окружности α и δ. Через некоторую точку $D_1 \in \delta$ проводится касательная к α, она вторично пересекает δ в точке D_2. Через D_2 проводится вторая касательная к α, она вторично пересекает δ в точке D_3 и т.д. Процесс периодичен, если $D_{n+1} = D_1$.

Теорема 2 (`Теорема Понселе`). *Если процесс Понселе, начинающийся в точке D_1, периодичен, то для любой начальной точки $D_1 \in \delta$, из которой можно провести касательную к α, он будет иметь тот же период.*

Зигзаг-процесс. Даны окружности β и δ, ни одна из них не содержит центр другой. Дано число $\rho > 0$. Возьмем $D_1 \in \delta, B_1 \in \beta$ такие, что $D_1B_1 = \rho$. Далее берем точку $D_2 \in \delta$, для которой $D_2B_1 = \rho$ и $D_2 \neq D_1$ (если таковой не существует, то $D_2 = D_1$), затем точку $B_2 \in \beta$ такую, что $B_2D_2 = \rho$, $B_2 \neq B_1$ (иначе $B_2 = B_1$), и т.д. Зигзаг имеет период n если $D_{n+1} = D_1$.

Теорема 3 (`Теорема о зигзаге`). *Если зигзаг периодичен для некоторой начальной точки $D_1 \in \delta$, то он имеет тот же период для любой начальной точки $D_1 \in \delta$, из которой можно сделать первый шаг зигзага.*

Интуиция подсказывает, что три теоремы о замыкании должны быть связаны друг с другом. В 2000 г. венгерский учитель А. Храшко обнаружил, что теоремы Понселе и о зигзаге следуют друг из друга [5], а в 2001 г. московские математики А.А. Заславский и Г.Р. Челноков показали, что все три теоремы могут быть доказаны одним и тем же алгебраическим методом [6]. Как мы установим в упражнениях 4-6, три классические теоремы о замыкании действительно имеют общий корень. Они являются частными случаями одного и ого же факта. Факт этот, как ни странно, значительно менее известен. Он носит название теоремы Эмха. Перед её формулировкой введем несколько понятий. Для окружности γ, касающейся двух данных окружностей α_0, α_1, индекс касания равен 0 если из двух касаний (γ с α_0 и γ с α_1) четное число внутренних, а если – нечетное, то индекс равен 1 (касание – внутреннее, если одна из окружностей лежит внутри другой). Для $i = 0, 1$ обозначим через $\mathcal{M}_i$ множество окружностей, касающихся α_0 и α_1 с индексом i. Эти понятия распространяются и на случай когда окружности вырождаются в прямые (индекс касания зависит от ориентации прямой) или точки.

Обобщенный процесс. На плоскости даны три окружности α_0, α_1 и δ. Каждая из них может вырождаться в прямую или точку. Фиксируем $i \in \{0, 1\}$. Предполагаем, что $\delta \notin \mathcal{M}_i$. Берется окружность $\gamma_1 \in \mathcal{M}_i$, пересекающая δ в точках D_1 и D_2. Через D_2 проводим окружность $\gamma_2 \in \mathcal{M}_i$, отличную от γ_1 (если ее не существует, то полагаем $\gamma_2 = \gamma_1$), обозначаем через D_3 вторую точку пересечения γ_2 и δ (если эти окружности касаются, то $D_3 = D_2$), затем проводим через D_3 окружность $\gamma_3 \in \mathcal{M}_i$ и т.д. Процесс имеет период n, если $\gamma_{n+1} = \gamma_1$.

Теорема 4 (`Теорема Эмха`). *Если обобщенный процесс периодичен для некоторой начальной окружности γ_1, то он имеет тот же период для любой начальной окружности $\gamma_1 \in \mathcal{M}_i$, пересекающей δ.*

I. Частные случаи теорем о замыкании

1. Пользуясь формулой Эйлера для треугольника $OI^2 = R^2 - 2Rr$ докажите теорему Понселе для $n = 3$. Здесь O и I – центры описанной и вписанной окружности, R и r – их радиусы.

`Указание.` Рассмотрите такую задачу: построить треугольник, если дана описанная окружность, вершина A и точка I. Исследуйте, сколько решений она может иметь.

2. Пользуясь инверсией, докажите теорему Штейнера.

`Указание.` Сделайте инверсию, переводящую эти окружности в концентрические.

3. Докажите теорему о зигзаге для двух окружностей на плоскости при $n = 2$. Найдите соотношение между радиусами окружностей, расстоянием между их центрами и длиной прыжка, гарантирующее замыкание.

Теперь убедимся, что теоремы 1-3 следуют из теоремы 4.

II. Соотношения между теоремами о замыкании

4. Покажите, что теорема 1 есть частный случай теоремы 4.

`Указание.` Сначала надо доказать, что если окружности γ_1 и γ_2 касаются друг друга и вписаны в кольцо между окружностями α_0 и α_1, то их точка касания лежит не некоторой фиксированной окружности. Взяв эту окружность за δ, выведите теорему 2 из теоремы 4.

5. Покажите, что теорема 2 есть частный случай теоремы 4, когда окружность α_0 вырождается в точку.

`Указание.` Проведите инверсию с центром в этой точке.

6. Покажите, что теорема 3 есть частный случай теоремы 4, когда окружности α_0 и α_1 концентричны.

Итак, теоремы 1-3 следуют из теоремы 4. Если мы найдем красивое геометрическое доказательство теоремы 4 (теоремы Эмха), то, тем самым, оно также будет доказывать теоремы Штейнера, Понселе и о зигзаге.

III. Вспомогательные результаты для доказательства теоремы Эмха

Определение 1. *Две окружности называются ортогональными, если их касательные, проведенные в точке пересечения, перпендикулярны. Пучком окружностей называется множество окружностей (которые могут вырождаться в точки или прямые), ортогональные двум данным окружностям.*

7. Докажите, что для любой пары окружностей существует ровно один пучок, их содержащий.

8 (действительная параметризация пучка). Докажите, что для любого $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ множество точек плоскости, отношение степеней которых относительно двух окружностей α и β равно t, является окружностью (при $t = 1$ – прямой) пучка, проходящего через α и β.

`Указание.` Степенью точки относительно окружности называется величина $d^2 - R^2$, где R – радиус окружности, d – расстояние от данной точки до центра окружности. Решить эту задачу удобнее методом координат.

9 (основная лемма). Две окружности с центрами O_1, O_2 и радиусами r_1, r_2 соответственно, пересекаются в точках A и B. Пусть P - четвертая вершина параллелограмма O_2AO_1P. Тогда для любой окружности с центром в точке P, пересекающей обе окружности (первую - в точках M_1, N_1, вторую - в точках M_2, N_2) имеем

а) прямые M_1M_2 и N_1N_2 пересекаются в точке A;

б) $\frac{M_1N_1}{M_2N_2} = \frac{AN_1}{AM_2} = \frac{AM_1}{AN_2} = \frac{BM_1}{BM_2} = \frac{BN_1}{BN_2} = \frac{r_1}{r_2}$.

Теперь всё готово для геометрического доказательства теоремы Эмха. Само доказательство мы здесь приводить не будем. Оно достаточно длинно и неудачно. Однако, возможно, вам удастся получить короткое и красивое доказательство. Подробности и некоторые идеи можно узнать, написав автору по e-mail. Мы же пока, считая теорему доказанной, посмотрим некоторые её следствия. Эти задачи несложно выводятся из теоремы Эмха (попробуйте сделать это самостоятельно!), однако любое независимое решение будет приветствоваться.

IV. Некоторые следствия

10. Докажите, что теорема Эмха равносильна теореме Понселе в плоскости Лобачевского.

11. Докажите теорему о зигзаге в плоскости Лобачевского.

12. На прямой l лежат точки A_1, A_2, A_4, A_3 (в данной последовательности). На каждом отрезке A_iA_{i+1}, как на хорде, построена окружность s_i (полагаем $A_5 = A_1$). Докажите, что если все окружности s_i, $i = 1, \ldots, 4$ касаются некоторой прямой, то они касаются и некоторой окружности.

13. В условиях задачи 12 докажите, что если одна из общих касательных к окружностям s_1, s_3 пересекает общую касательную к окружностям s_2, s_4 на прямой l, то две другие общие касательные также пересекаются на этой прямой.

Список литературы

1. P.A.Griffiths and J.Haris, On Cayley's explicit solution to Poncelet's porism, *L'Enseigment Math.* 24 (1978), 31-40.
2. W.L.Black, H.C.Howland and B.Howland, A theorem about zigzags between two circles, *Amer. Math. Monthly* , 81 (1974), 754-757.
3. J.V.Poncelet, Traité des propriétés projectives des figures, Paris 1865, (first ed. in 1822).
4. O.Bottema, Ein Schliessungssatz für zwei Kreise, *Elem. Math.*, 20 (1965), 1-7.
5. A.Hraskó, Poncelet-type problems, an elementary approach, *Elem.Math.,* 55 (2000), 45-62.
6. А.А.Заславский, Г.Р.Челноков, Теорема Понселе в евклидовой и алгебраической геометрии, *Математическое Образование,* 19 (2001), No 4, 49-64.
7. М.Берже, Геометрия, М. Мир, 1984.
8. В.Ю.Протасов, Об одном обобщении теоремы Понселе, *Успехи Мат. Наук,* том 61 (2006), вып. 6, 187-189.

Протасов Владимир Юрьевич, Московский государственный университет, механико-математический факультет, Воробьевы Горы, Москва, 119992, e-mail: `v-protassov@yandex.ru`