ТОЧКИ БРОКАРА

А.Заславский и другие участники группы Hyacinthos
zaslavsky@mccme.ru

1 Определения и вводные задачи

1. Дан треугольник ABC. Доказать, что существует единственная точка P, такая что $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA = \phi_1$, и единственная точка Q, такая что $\angle QBA = \angle QCB = \angle QAC = \phi_2$.

Определение 1. Точки P и Q называются *точками Брокара* треугольника ABC.

2.

a) Доказать, что $\phi_1 = \phi_2 = \phi$.

b) Выразить ϕ через углы треугольника ABC.

Определение 2. Угол ϕ называется *углом Брокара* треугольника ABC.

3. Доказать, что проекции точек Брокара на стороны треугольника лежат на одной окружности (На самом деле, это верно для любых двух изогонально сопряженных точек).

4. Пусть O — центр описанной окружности ABC.

a) Доказать, что $OP = OQ$.

b) Доказать, что $\angle POQ = 2\phi$.

Определение 3. Прямые, симметричные медианам треугольника относительно соответствующих биссектрис, называются *симедианами*. Можно доказать, что три симедианы пересекаются в одной точке L, которая называется *точкой Лемуана* треугольника.

5. Доказать, что P и Q лежат на окружности с диаметром OL.

2 Основные задачи

6. Дана выпуклая ломаная $ABCD$. Доказать, что существует единственная точка P, такая что $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCD = \phi$.

Определение 4. Точку P и угол ϕ будем называть *точкой и углом Брокара* ломаной $ABCD$ и обозначать $P(ABCD)$ и $\phi(ABCD)$.

7. Выразить $\phi(ABCD)$ через длины звеньев ломаной и углы между ними.

8. Доказать, что $\phi(ABCD) = \phi(DCBA)$ тогда и только тогда, когда точки A, B, C, D лежат на одной окружности.

В дальнейшем все рассматриваемые многоугольники предполагаются вписанными.

9. Пусть $P_1 = P(ABCD)$, $P_2 = P(BCDA)$, $P_3 = P(CDAB)$, $P_4 = P(DABC)$. Доказать, что четырехугольник $P_1P_2P_3P_4$ — вписанный.

10. Пусть $Q_1 = P(DCBA)$, $Q_2 = P(ADCB)$, $Q_3 = P(BADC)$, $Q_4 = P(CBDA)$. Доказать, что $P_1P_2/Q_1Q_2 = BC/CD$, $P_2P_3/Q_2Q_3 = CD/DA$ и т.д.

11. (Гипотеза) площади четырехугольников $P_1P_2P_3P_4$ и $Q_1Q_2Q_3Q_4$ равны.

12. Доказать, что $\phi(ABCD) = \phi(BCDA)$ тогда и только тогда, когда $AB \cdot CD = AD \cdot BC$.

Определение 5. Вписанный четырехугольник, произведения противоположных сторон которого равны называется *гармоническим*. Из последней задачи следует, что в гармоническом четырехугольнике существуют такие точки P и Q, что $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCD = \angle PDA = \angle QDC = \angle QCB = \angle QBA = \angle QAD = \phi$. Точки P, Q будем называть *точками Брокара*, а угол ϕ *углом Брокара* четырехугольника $ABCD$.

13. Доказать, что каждое из следующих условий равносильно тому, что четырехугольник $ABCD$ гармонический.

a) Касательные к описанной окружности в точках A и C пересекаются на прямой BD.

b) Диагональ BD является симедианой треугольника ABC.

c) Расстояния от точки пересечения диагоналей L до сторон четырехугольника пропорциональны этим сторонам.

d) Существует инверсия, переводящая точки A, B, C, D в вершины квадрата.

e) Существует центральная проекция, при которой описанная окружность $ABCD$ проектируется в окружность, а сам четырехугольник в квадрат.

14. Выразить угол Брокара через углы гармонического четырехугольника.

15. Доказать, что $OP = OQ$ и $\angle POQ = 2\phi$.

16. Доказать, что P и Q лежат на окружности с диаметром OL.

3 Дополнительные задачи

Напоминаем, что все рассматриваемые многоугольники вписанные.

Определение 6. Многоугольник $A_1 \dots A_n$ будем называть *брокаровским* если существует такая точка P, что $\angle PA_1A_2 = \angle PA_2A_3 = \cdots \angle PA_nA_1 = \phi$.

17. Доказать, что в брокаровском многоугольнике существует также такая точка Q, что $\angle QA_1A_n = \angle QA_nA_{n-1} = \cdots \angle QA_2A_1 = \phi$.

Определение 7. Точки P, Q и угол ϕ будем называть *точками и углом Брокара* многоугольника $A_1 \dots A_n$.

18. Доказать, что брокаровость равносильна каждому из следующих условий.

a) Существует точка L, расстояния от которой до сторон многоугольника пропорциональны этим сторонам.

b) Симедианы треугольников $A_1A_2A_3, A_2A_3A_4, \dots, A_nA_1A_2$, проведенные из вершин $A_2, A_3, \dots, A_1$, пересекаются в одной точке.

c) Точки пересечения прямых $A_1A_3, A_2A_4, \dots, A_nA_2$ с касательными к описанной окружности многоугольника в точках $A_2, A_3, \dots, A_1$ лежат на одной прямой.

d) Существует инверсия, переводящая точки $A_1, \dots, A_n$ в вершины правильного многоугольника.

e) Существует центральная проекция, переводящая описанную окружность многоугольника в окружность, а сам многоугольник в правильный.

19. Доказать, что точки Брокара лежат на окружности с диаметром OL и $\angle POL = \angle QOL = \phi$.

20.

a) Доказать, что существуют две точки T_1, T_2, инверсия с центром в которых переводит точки $A_1, \dots, A_n$ в вершины правильного многоугольника.

b) Доказать, что T_1, T_2 лежат на прямой OL и $\angle T_1PL = \angle T_2PL = \frac{\pi}{n}$.

21. Выразить угол Брокара через отношение OL/R.