Задачи для Конференции школьников

А.М. Райгородский

1 Хроматические числа

Хроматическим числом плоскости называется минимальное количество цветов, в которые можно так покрасить все точки плоскости, чтобы между точками одного цвета не было расстояния 1. Введем некоторые стандартные обозначения. Так, через $\mathbb{R}^2$ мы обозначим плоскость, а через

$$|\mathbf{x}-\mathbf{y}| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

– расстояние между точками $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. В свете этих обозначений можно сказать, что хроматическое число плоскости – это такое натуральное число χ, что существует раскраска $\mathbb{R}^2 = V_1 \cup \ldots \cup V_\chi$ плоскости в χ цветов, при которой $|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \neq 1$ для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_i$ при любом i, и не существует раскраски $\mathbb{R}^2 = V_1 \cup \ldots \cup V_{\chi'}$ с теми же свойствами ни при каком $\chi' < \chi$. Запись $\mathbb{R}^2 = V_1 \cup \ldots \cup V_\chi$ подразумевает, что точки из V_1 покрашены в первый цвет, точки из V_2 – во второй, и т.д., так что, конечно, множества V_i и V_j не пересекаются ни при каких различных i и j. Желая подчеркнуть последний факт, мы будем писать $\mathbb{R}^2 = V_1 \bigsqcup \ldots \bigsqcup V_\chi$ (здесь "$\bigsqcup$" – стандартный знак *дизъюнктного объединения* множеств, т.е. объединения множеств, которые между собой не пересекаются). Обозначим хроматическое число плоскости через $\chi(\mathbb{R}^2)$.

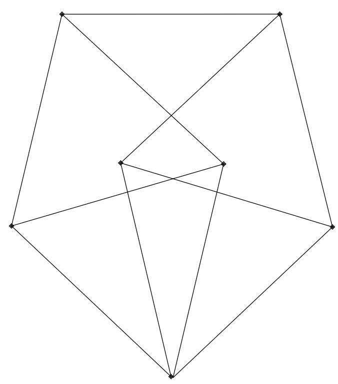

Рисунок 1: Конструкция для нижней оценки

Величина $\chi(\mathbb{R}^2)$ устроена, на удивление, нетривиально. Самое поразительное то, что до сих пор ее значение не найдено! Известно лишь, что $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 4$ и что $\chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$. Первая оценка легко следует из рассмотрения конструкции, изображенной на рисунке 1, вторая оценка получается за счет явной раскраски, приведенной на рисунке 2. Детали рассуждений, которые необходимы для обоснования упомянутых фактов, изложены в брошюре [1].

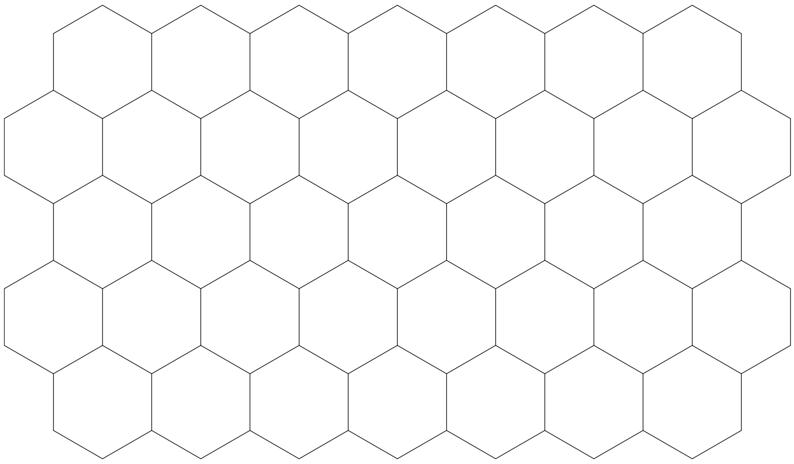

Рисунок 2: Явная раскраска плоскости

Как видно из рисунка 2, каждый цвет в семицветной раскраске плоскости представляет собой дизъюнктное объединение правильных шестиугольников. Единственная тонкость состоит в том, что границы этих шестиугольников мы, в действительности, вольны покрасить в произвольный цвет (см. [1]). Иными словами, имеет место разложение $\mathbb{R}^2 = V_1 \bigsqcup \ldots \bigsqcup V_7$, в котором множества V_i сами распадаются на непересекающиеся шестиугольники; только эти шестиугольники не обязательно "замкнуты" (содержат свою границу).

Мы будем интересоваться в дальнейшем лишь раскрасками, которые по своим свойствам напоминают раскраску шестиугольниками. А именно, пусть $\mathcal{A}$ – некоторое множество выпуклых многоугольников. Тогда положим $\chi_{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^2)$ равным минимуму из всех χ, для которых существует такое разбиение $\mathbb{R}^2 = V_1 \bigsqcup \ldots \bigsqcup V_\chi$, что каждое множество V_i в нем не содержит пар точек на расстоянии 1 и является дизъюнктным объединением тех или иных (возможно, одинаковых) элементов из $\mathcal{A}$; при этом границы участвующих в объединении многоугольников мы произвольно относим к подходящим V_i.

На самом деле, Д.Р. Вудалл (см. [2]) рассмотрел еще более жирную совокупность плоских фигур $\mathcal{A}^*$: он требовал только, чтобы границы этих фигур были "Жордановыми" (см. [3]), и даже выпуклость его не беспокоила. Тем не менее, и в столь, казалось бы, мало ограничительных предположениях Вудалл установил неравенство $\chi_{\mathcal{A}^*}(\mathbb{R}^2) \geq 6$. Здесь определение величины $\chi_{\mathcal{A}^*}(\mathbb{R}^2)$ стандартно, а неравенство Вудалла удивительно: ведь его правая часть аж на двойку превосходит правую часть неулучшенной никем до сих пор оценки $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 4$. Как же гнусно должны быть устроены цвета в четырехцветной раскраске плоскости, коль скоро таковая существует!

Возникают следующие естественные задачи.

Задача 1. (*Учебно-исследовательская*) Максимально упростив рассуждение Вудалла, докажите оценку $\chi_{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^2) \geq 6$ для произвольного множества $\mathcal{A}$ выпуклых многоугольников.

Задача 2. (*Научно-исследовательская*) Опишите как можно более широкий класс (выпуклых) многоугольников $\mathcal{A}$, для которого справедливо неравенство $\chi_{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^2) \geq 7$.

Отметим, что публикация возможна и в случае решения задачи 1.

Теперь обсудим нижнюю оценку величины $\chi(\mathbb{R}^2)$. Как мы помним, она получается за счет рассмотрения конструкции с рисунка 1 (эта конструкция называется *мозеровским веретеном*). Подобные конструкции носят название *графов (единичных) расстояний.* Действительно, граф единичных расстояний на плоскости представляет собой конечный набор точек (*вершин* графа), пары которых соединяются отрезками (*ребрами*) тогда и только тогда, когда расстояние между ними равно 1. Кажется весьма естественным, что, желая установить неравенство $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 3$ или, тем более, $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 4$, мы берем граф расстояний, содержащий несколько "сплетенных" между собой треугольников: именно таково мозеровское веретено. Каждый треугольник требует для "правильной" покраски своих вершин (т.е. покраски, в которой нет единичных отрезков с одноцветными концами) "палитры" из, как минимум, трех цветов; необходимость же в добавлении в палитру еще одного цвета возникает за счет дополнительных отрезков длины 1, соединяющих эти треугольники. Однако П. Эрдеш в 1976 году высказал гипотезу: *существуют графы расстояний на плоскости, вершины которых, подобно вершинам мозеровского веретена, не допускают правильной раскраски в три цвета, но которые, тем не менее, не содержат треугольников.* Гипотеза Эрдеша, при всей своей неожиданности, довольно скоро была доказана. В 1979 году Н. Уормалд построил граф расстояний, имеющий 6448 вершин и удовлетворяющий необходимым требованиям (см. [4]). Значительное улучшение результата Уормалда получили П. О'Доннелл и Р. Хохберг в 1996 году (см. [5]): им удалось построить граф, аналогичный уормалдовскому, задействовав всего 23 вершины. Кроме того, О'Доннелл и Хохберг предъявили граф, вершины которого нельзя правильно покрасить в три цвета и который не содержит, помимо треугольников, также циклов длины 4 ("квадратов"). Этот граф имеет уже 45 вершин. Возникают следующие естественные задачи.

Задача 3. (*Учебно-исследовательская*) Можно ли в конструкциях О'Доннелла – Хохберга удалить часть ребер, так, чтобы вершины этих конструкций по-прежнему не допускали правильной трехцветной раскраски? Если ответ положительный, то как много ребер можно удалить?

Задача 4. (*Научно-исследовательская*) Попытайтесь еще уменьшить количество вершин в конструкциях, подобных конструкциям Уормалда и О'Доннелла – Хохберга.

Задача 5. (*Научно-исследовательская*) Найдите как можно лучшую *нижнюю* оценку числа вершин в конструкциях, подобных конструкциям Уормалда и О'Доннелла – Хохберга.

Задачу отыскания величины $\chi(\mathbb{R}^2)$ легко обобщить на случай трехмерного пространства, обозначаемого, соответственно, $\mathbb{R}^3$. Возникает величина $\chi(\mathbb{R}^3)$. Известно, что $6 \leq \chi(\mathbb{R}^3) \leq 15$ (см. [1], [6], [7]). Даже для получения оценки $\chi(\mathbb{R}^3) \geq 5$ рассматривается ("трехмерный") граф расстояний, который полностью аналогичен мозеровскому веретену и содержит несколько тетраэдров. Недавно О. Рубанов построил другой граф: вершины этого графа по-прежнему не красятся в четыре цвета правильным образом; однако тетраэдров в нем нет (см. [8]). Нерешенными остаются следующие задачи.

Задача 6. (*Научно-исследовательская*) Постройте трехмерный граф расстояний, вершины которого нельзя раскрасить в четыре цвета и который не содержит треугольников.

Задача 7. (*Научно-исследовательская*) Постройте трехмерный граф расстояний, вершины которого нельзя раскрасить в пять цветов и который не содержит тетраэдров.

Задача 8. (*Научно-исследовательская*) Постройте трехмерный граф расстояний, вершины которого нельзя раскрасить в пять цветов и который не содержит треугольников.

Задача 9. (*Научно-исследовательская*) Найдите конструкцию, подобную рубановской, с меньшим числом вершин или докажите, что таких конструкций не существует.

2 Проблема Эрдеша – Секереша

Следующая задача элементарной геометрии была предложена П. Эрдешом и Г. Секерешом в 1935 году (см. [9]): *для каждого целого $n \geq 3$ найти минимальное положительное число $g(n)$, такое, что из любого $g(n)$-элементного множества точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, можно выбрать подмножество размера n, элементы которого являются вершинами выпуклого n-угольника.*

Очевидно, что $g(3) = 3$, и легко показать, что $g(4) = 5$ (см. рис. 3).

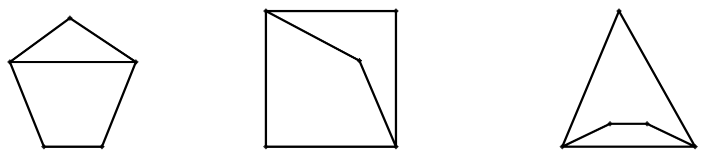

Рисунок 3: Виды расположения пяти точек на плоскости

Конечность величины $g(n)$ при произвольном n установили сами Эрдеш и Секереш. Различные способы получения этого результата изложены в [10] и [11]. Наилучшей в настоящее время является оценка $g(n) \leq C_{2n-5}^{n-3} + 1$ при $n \geq 5$ (см. [12]).

В то же время Эрдеш и Секереш показали, что всегда выполнено неравенство $g(n) \geq 2^{n-2} + 1$. Как видно, при $n = 3, 4$ это неравенство неулучшаемо: $g(3) = 3 = 2^{3-2} + 1$, $g(4) = 5 = 2^{4-2} + 1$. Соответственно, авторы проблемы высказали гипотезу: $g(n) = 2^{n-2} + 1$ при всех $n \geq 3$. Из сказанного выше ясно, что гипотеза до сих пор никем не доказана и не опровергнута. Она лишь подтверждена при $n \leq 6$ (см. [13], [14]). При этом у рассуждения, показывающего, что $g(6) = 17$, есть один существенный недостаток: оно использует компьютерный перебор.

Возникают следующие естественные задачи.

Задача 10. (*Учебно-исследовательская*) Самостоятельно докажите равенство $g(5) = 9$.

Задача 11. (*Научно-исследовательская*) Попытайтесь избавиться от компьютерного перебора при доказательстве равенства $g(6) = 17$.

Задача 12. (*Научно-исследовательская*) Найдите или как можно точнее оцените (желательно, без компьютера) величины $g(7)$, $g(8)$ и $g(9)$. Особенно любопытны верхние оценки последних двух величин, сколько-нибудь более точные, нежели общее неравенство $g(n) \leq C_{2n-5}^{n-3} + 1$.

Задача 13. (*Научно-исследовательская*) Уточните оценку $g(n) \leq C_{2n-5}^{n-3} + 1$. Даже на единицу лучший результат интересен!

Список цитированной литературы

[1] А.М. Райгородский, *Хроматические числа*, Москва, МЦНМО, 2003.

[2] D.R. Woodall, *Distances realized by sets covering the plane*, J. Combinatorial Theory Ser. A, 14 (1973), 187-200.

[3] *Современная иллюстрированная энциклопедия: Математика и информатика*, Москва, "РОСМЭН", 2007.

[4] N. Wormald, *A 4-chromatic graph with a special plane drawing*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A, 28 (1979), N1, 1-8.

[5] R. Hochberg, P. O'Donnell, *Some 4-chromatic unit-distance graphs without small cycles*, Geombinatorics, 5 (1996), N4, 137-141.

[6] D. Coulson, *15-colouring of 3-space omitting distance one*, Discrete Math., 256 (2002), N1-2, 83-90.

[7] O. Nechushtan, *On the space chromatic number*, Discrete Math., 256 (2002), N1-2, 499-507.

[8] О. Рубанов, *Хроматические числа трехмерных графов расстояний, не содержащих тетраэдров*, Матем. заметки, 82 (2007), N5, 797-800.

[9] P. Erdős, G. Szekeres, *A combinatorial problem in geometry*, Compositio Math., 2 (1935), 463-470.

[10] W. Morris, V. Soltan, *The Erdős - Szekeres problem on points in convex position*, Bulletin (new series) of the Amer. Math. Soc., 37 (2000), N4, 437-458.

[11] М. Холл, *Комбинаторика*, Москва, "Мир", 1970.

[12] G. Tóth, P. Valtr, *The Erdős–Szekeres theorem: upper bounds and related results*, Combinatorial and Computational geometry, MSRI Publication 52 (2005), 557-568.

[13] P. Erdős, G. Szekeres, *On some extremum problems in elementary geometry*, Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math., 3-4 (1961), 53-62.

[14] G. Szekeres, P. Lindsay, *Computer solution to the 17-point Erdős–Szekeres problem*, ANZIAM J., 48 (2006), 151-164.