О множестве попарных сумм элементов конечного множества

С. В. Конягин

(konyagin@ok.ru)

Пусть A— конечное множество действительных чисел. Через $2A$ обозначим множество элементов вида $x+y$, $x,y\in A$. Например, если $A=\{1,2,3\}$, то $2A=\{2,3,4,5,6\}$, а если $A=\{1,2,4\}$, то $2A=\{2,3,4,5,6,8\}$. Нас интересует вопрос о величине множества $2A$, если множество A состоит из n элементов. Последнее предположение мы будет запичывать в виде $|A|=n$. Вышеприведенные примеры показывают, что величина $|2A|$ не определяется числом n.

Итак, мы будем предполагать, что $|A|=n$. Легко видеть, что $|2A|\geq 2n-1$. Действительно, пусть

$$A=\{a_1,\dots,a_n\},\quad a_1<\dots<a_n.$$

Тогда $2n-1$ чисел

$$a_1+a_1,a_1+a_2,\dots,a_1+a_n,a_2+a_n,\dots,a_n+a_n$$

различны и принадлежат $2A$. Оценка $2n-1$ является точной: если $A=\{1,\dots,n\}$, то $2A=\{2,\dots,2n\}$ и $|2A|=2n-1$.

Задача 1. *Докажите, что если элементы A образуют арифмемтическую прогрессию, то $|2A|=2n-1$.*

Задача 2. *Докажите, что если элементы A не образуют арифмемтическую прогрессию, то $|2A|>2n-1$.*

Нетрудно получить и точную верхнюю оценку на $|2A|$. Количество элементов вида $2x, x\in A$, равно n, а количество элементов вида $x+y,x,y\in A,x\neq y$, равно C_n^2. Следовательно,

$$|2A|\leq n+C_n^2=n(n+1)/2.$$

Задача 3. *Докажите, что если $A=\{1,2,\dots,2^{n-1}\}$, то $|2A|=n(n+1)/2$.*

Задачи 1 и 2 позволяют предположить, что если множество A в каком-то смысле далеко от арифметической прогрессии, то $|2A|$ намного больше $2n-1$. Мы будем рассматривать класс множеств A, далеких от арифметических прогрессий. Этот класс определяется следующим условием:

$$A=\{a_1,\dots,a_n\},\quad 0<a_2-a_1<\dots<a_n-a_{n-1}. \tag{1}$$

Имеет место следующий результат.

Теорема 1. *Существует такая константа $C>0$, что если A удовлетворяет (1), то $|2A|\geq Cn^{3/2}$.*

Доказательство вытекает из серии утверждений, предлагаемых ниже в качестве задач. Для $i=1,\dots,n$ обозначим

$$B_i=A+a_i=\{x+a_i:\,x\in A\}.$$

Пусть $k\in\{1,\dots,n\}$.

Задача 4. *Докажите, что*

$$|2A| \geq kn - \sum_{1 \leq i < j \leq k} |B_i \cap B_j|.$$

Задача 5. *Докажите, что при* $1 \leq i < j \leq n$

$$|B_i \cap B_j| \leq j - 1.$$

Для решения задачи 5 можно воспользоваться следующим соображением. Фиксируем $i < j$. Нас интересуют пары (u, v) такие, что

$$a_v - a_u = a_j - a_i.$$

Тогда пара (u, v), с одной стороны, однозначно определяется числом u, а с другой стороны, при выполнении (1),– числом $v - u$.

Задача 6. *Выведите из результатов задач 4 и 5, что*

$$|2A| \geq kn - \sum_{1 \leq j \leq k} (j-1)^2.$$

Задача 7. *Пусть* $k = [\sqrt{n} + 1/2]$. *Докажите, что*

$$kn - \sum_{1 \leq j \leq k} (j-1)^2 \geq n^{3/2}/6 - n/2.$$

Задача 8. *Докажите, что существует такая константа* $C > 0$, *что*

$$\max\left(n^{3/2}/6 - n/2, 2n - 1\right) \geq Cn^{3/2}.$$

По-видимому, нижнюю оценку в теореме 1 можно усилить, но мы не умеем этого делать. Следующие вопросы остаются открытыми.

Проблема 1. *Верно ли, что, что существуют константа* $C > 0$ *и* $u > 3/2$ *такие, что если* A *удовлетворяет (1), то* $|2A| \geq Cn^u$*?*

Проблема 2. *Верно ли, что, что для любого числа* $u \in (3/2, 2)$ *существует число* $C_u > 0$ *такое, что если* A *удовлетворяет (1), то* $|2A| \geq C_u n^u$*?*

Отметим, что при $u = 2$ соответствующего числа $C_2 > 0$ не существует; это можно показать, рассматривая множества $A = \{1^2, \ldots, n^2\}$.