ЦЕНТРЫ ТЯЖЕСТИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ И МНОГОГРАННИКОВ

А.Заславский zaslavsky@mccme.ru

Основные сведения о центрах тяжести

Центром тяжести треугольника принято называть точку пересечения его медиан. Действительно, нетрудно убедиться, что именно в этой точке лежит центр тяжести трех тел равной массы, расположенных в вершинах треугольника. Можно показать также, что точка пересечения медиан является центром тяжести "сплошного" треугольника, например, вырезанного из картона. Однако, если вся масса треугольника сосредоточена в его периметре, что можно считать выполненным для треугольника, сделанного из проволоки, то центром тяжести будет другая точка. Для произвольного многоугольника можно определить три центра тяжести: центр тяжести M_0 его вершин, центр тяжести M_1 периметра и центр тяжести M_2 сплошного многоугольника. Аналогично для многогранника можно определить четыре центра: центр тяжести вершин M_0, центр тяжести остова M_1, центр тяжести поверхности M_2 и центр тяжести сплошного многогранника M_3. Задача состоит в том, чтобы научиться находить эти центры и исследовать связи между ними. Основным инструментом ее решения является следующее общее свойство центров тяжести.

Основное свойство. Пусть фигура F является объединением двух непересекающихся фигур F_1 и F_2. Тогда центр тяжести M фигуры F лежит на отрезке M_1M_2, где M_1, M_2 — центры тяжести F_1, F_2, причем отношение отрезков MM_1/MM_2 равно отношению m_2/m_1 масс F_2 и F_1.

Вводные задачи

1. Найти точку M_1 треугольника ABC.

2. Доказать, что в любом треугольнике M_1, M_0 и центр I вписанной окружности лежат на одной прямой (*прямая Нагеля*), причем M_0 делит отрезок IM_1 в отношении $2:1$.

3. Доказать, что M_1 — радикальный центр трех вневписанных окружностей треугольника ABC, т.е. касательные, проведенные из M_1 к этим окружностям равны.

4. Доказать, что каждая из прямых, соединяющих M_1 с сердинами сторон треугольника, делит его периметр пополам.

5. Найти точку M_0 четырехугольника $ABCD$.

6. Найти точку M_2 четырехугольника.

7. Доказать, что точка M_0 лежит на отрезке LM_2, где L — точка пересечения диагоналей четырехугольника и делит его в отношении $3:1$.

8. Найти точку M_1 четырехугольника.

9. Найти точку M_2 для тетраэдра.

10. Доказать, что M_0 лежит на отрезке M_2I, где I — центр сферы, вписанной в $ABCD$, и делит его в отношении $1:3$.

Основные задачи

11. Доказать, что, если в многоугольник можно вписать окружность с центром I, то M_2 лежит на отрезке IM_1 и делит его в отношении $2:1$.

12. Доказать, что для произвольного многогранника, описанного около сферы с центром I, M_3 лежит на отрезке IM_2 и делит его в отношении $3:1$.

13. Доказать, что в описанном четырехугольнике точка M_0 является серединой отрезка M_1W, где W — середина IL.

14. (А.Мякишев) Пусть около $ABCD$ можно описать окружность с центром в O. Доказать, что точки H, M_2, O, где H — точка пересечения прямых, соединяющих ортоцентры треугольников ABC и ADC, BCD и ABD, лежат на одной прямой и $HM_2 : M_2O = 2 : 1$.

15. (А.Мякишев) Пусть в $ABCD$ можно вписать окружность с центром в I. Точкой Нагеля N описанного четырехугольника назовем точку пересечения двух прямых, каждая из которых проходит через точки на противоположных сторонах четырехугольника, симметричные точкам касания вписанной окружности относительно середин сторон. (Эти прямые делят периметр четырехугольника пополам). Доказать, что M_1 — середина NI.

16. Для произвольного четырехугольника определим *квазицентр вписанной окружности*, как такую точку I, что M_2 лежит на отрезке IM_1 и делит его в отношении $2:1$. Доказать, что I удовлетворяет условию

$$\frac{S_{IAB} - S_{ICD}}{AB - CD} = \frac{S_{IBC} - S_{IDA}}{BC - DA}. \qquad (1)$$

17. Доказать, что множество точек, удовлетворяющих (1), — это прямая, параллельная M_0M_1.

Дополнительные задачи

18. Четырехугольник $ABCD$ не является параллелограммом. Доказать, что квазицентр I лежит на прямой Гаусса (соединяющей середины диагоналей), тогда и только тогда, когда в $ABCD$ можно вписать окружность.

19. Для произвольного четырехугольника определим *квазиточку Нагеля*, как точку N, симметричную квазицентру I относительно M_1. Исследовать геометрические свойства точки N.

Рассмотрим многоугольник, который является описанным и вписанным. По теореме Понселе можно, зафиксировав описанную и вписанную окружности, вращать многоугольник между ними. Возникает вопрос, какие кривые описывают при этом центры тяжести. Есть гипотеза, что эти кривые — окружности.

20. Доказать гипотезу для треугольника.

21. Доказать гипотезу для четырехугольника.

22. Найти точку M_1 для тетраэдра.