ГАМИЛЬТОНОВЫ ГРАФЫ И ОСТОВНЫЕ ПОДГРАФЫ: ЗАДАЧИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ

А. ВЕСНИН

1. Остовные подграфы и гамильтоновы циклы

Пусть $G = (V, E)$ – граф с множеством вершин V и множеством ребер E. Далее всегда мы предполагаем, что граф G является *простым*, то есть не имеет петель и кратных ребер. Граф $G_1 = (V_1, E_1)$ называется *подграфом* графа $G = (V, E)$ если $V_1 \subseteq V$ и $E_1 \subseteq E$. Подграф G_1 называется *остовным*, если $V_1 = V$, то есть G_1 *проходит* через каждую вершину графа G.

Путем в графе $G = (V, E)$ назовем последовательность вида

$$v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k, \qquad k \geq 1,$$

состоящую из его вершин и ребер, где для каждого $j = 1, \dots, k$ ребро e_j соединяет вершины v_{j-1} и v_j, и при этом все вершины $v_1, \dots, v_k$ различны, за исключением, возможно, начальной и конечной. Графназывется *связным*, если любые две вершины графа можно соединить путем. Путь у котого начальная и конечная вершины совпадают назовем *циклом*. Цикл, имеющий k ребер, будем обозначать C_k.

Остовный путь в графе называется *гамильтоновым путем*, а остовный цикл в графе называется *гамильтоновым циклом*. Граф G называется *гамильтоновым*, если в нем имеется гамильтонов цикл.

Связный граф, не имеющий циклов, называется *деревом*. В соответствии с данными выше определениями любой путь, отличный от цикла, является деревом.

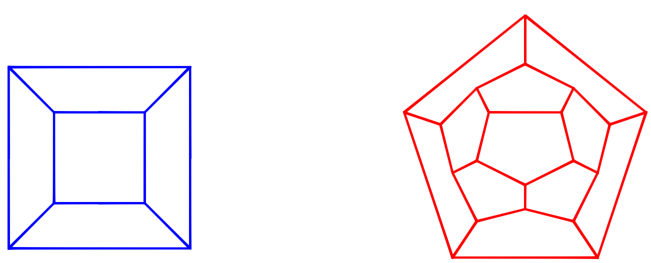

Рис. 1. Скелет куба и скелет додекаэдра.

Упражнение 1. *На рис. 1 приведены скелет куба и скелет додекаэдара. Как известно, скелет октаэда является двойственным к скелету куба, а скелет икосаэдра – к скелету додакаэдра. Для скелета каждого из перечисленных правильных многогранников укажите:*
(а) гамильтонов путь;
(б) гамильтонов цикл;
(в) остовное дерево, отличное от пути;
(г) остовный подграф, не являющийся связным.

Вопрос о том, какие графы являются гамильтоновыми, достаточно интенсивно изучается в теории графов. Отметим следующий хорошо известный (и просто формулируемый) результат.

Теорема 1 (Дирак, 1952). *Пусть число вершин графа G равно $n \geq 3$ и каждая вершина является концом для не менее чем $n/2$ ребер. Тогда G является гамильтоновым.*

Упражнение 2. *Докажите теорему 1.*

Date: 25 декабря 2007 г.

Обозначим через K_n *полный граф на n вершиных*, то есть такой граф с n вершинами в котором каждая пара различных вершин соединена ребром.

Упражнение 3. *Покажите, что ребра полного графа K_{2m+1} можно разбить в m гамильтоновых циклов (то есть, что в K_{2m+1} существует m гамильтоновых циклов никакие два из которых не имеют общих вершин).*

2. H-гамильтоновы графы

Пусть $e = (u, v)$ – ребро, концами которого являются вершины u и v. Операция *подразбиения ребра* состоит в "объявлении" на ребре e вершины w, то есть в замене ребра $e = (u, v)$ парой ребер $e_1 = (u, w)$ и $e_2 = (w, v)$. Операцию, обратную подразбиению ребра определим как замену пары ребер $e_1 = (u, w)$ и $e_2 = (w, v)$ ребром $e = (u, v)$ если вершина w не является концевой ни для каких других ребер. Два графа G_1 и G_2 называются *гомеоморфными* если от одного можно перейти к другому при помощи конечного числа операций подразбиния ребер или обратных к ним. Эквивалентно, G_1 и G_2 являются гомеоморфными, если существует граф G_3 такой, что он может быть получен операциями подразбиения ребер как из графа G_1, так и из графа G_2.

Упражнение 4. *Убедитесь в том, что*
(а) все ациклические графы-пути гомеоморфны друг другу;
(б) все графы-циклы гомеоморфны друг другу;
(в) граф, гомеоморфный дереву, является деревом.

Таким образом, граф является гамильтоновым, если он имеет остовный подграф, гомеоморфный 1-реберному циклу C_1.

Рассмотрим приведенный на рис. 2 граф $K_{3,2}$ с 5 вершинами и 6 ребрами. Его вершины разделены на два класса (две "доли") – 3 "красных" и 2 "синих", а ребра соединяют каждую пару разноцветных вершин. (В общем случае граф $K_{m,n}$, обладающий указанным свойством, называется *полным двудольным графом.*)

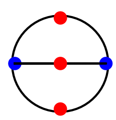

Рис. 2. Граф $K_{3,2}$.

Упражнение 5. *Убедитесь в том, что*
(а) граф $K_{3,2}$ не является гамильтоновым;
(б) граф $K_{3,2}$ гомеоморфнен тэта-графу θ, приведенному на рис. 3.

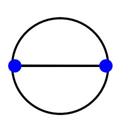

Рис. 3. Тэта-граф θ.

Упражнение 6. *Докажите, что полный двудольный граф $K_{m,n}$ является гамильтоновым тогда и только тогда, когда $m = n$.*

Обобщим понятие гамильтонова графа следующим образом. Зафиксируем граф H. Граф G назовем *H-гамильтоновым*, если в G имеется остовный подграф, гомеоморфный графу H. В частности, если $H = C_1$, то C_1-гамильтоновы графы являются гамильтоновыми в обычном смысле. Таким образом, граф $K_{3,2}$ является примером θ-гамильтонова, но не гамильтонова графа.

Упражнение 7. *(а) При каких условиях гамильтонов граф, отличный от окружности, является θ-гамильтоновым?*
(б) При каких условиях гамильтонов граф является K_4-гамильтоновым?
(в) Приведите примеры графов, являющихся K_4-гамильтоновыми, но не θ-гамильтоновыми.

В следующих задачах для самостоятельного исследования предлагается выяснить, как соотносятся свойства G-гамильтоновости и H-гамильтоновости для различных графов G и H.

Задача 1. *Докажите, что для любых графов G и H существует граф, являющийся H-гамильтоновым, но не являющийся G-гамильтоновым.*

Будем говорить, что граф G *гамильтоново мажорирует* граф H на классе графов $\mathcal{F}$, если для каждого графа F из класса $\mathcal{F}$ выполнено следующее свойство: если F является H-гамильтоновым, то F является G-гамильтоновым.

Задача 2. *Опишите "иерархию" графов по гамильтоновой мажорируемости. А именно, найдите тройки $(\mathcal{F}, G, H)$ такие, что для любого графа $F \in \mathcal{F}$ из H-гамильтоновости следует G-гамильтоновость.*

3. Графы многогранников

Богатым источником примеров графов являются 1-мерные скелеты многогранников. Характеризация таких графов дается в следующей классической теореме.

Теорема 2 (Штейниц). *Простой граф реализуется как скелет выпуклого многогранника в трехмерном пространстве тогда и только тогда, когда этот граф 3-связен и планарен.*

Доказательство. См. [5, с. 35]. □

Графы, удовлетворяющие теореме Штейница (т.е. 3-связные планарные графы) назовем *графами многогранников*. Пример 14-гранника, скелет которого имеет гамильтонов цикл, приведен на рис. 4.

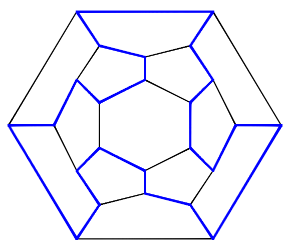

Рис. 4. Гамильтонов цикл на 14-граннике.

По-видимому, первый пример графа многогранника, не являющегося гамильтоновым, был построен Гринбергсом (см. [1, с. 285]). Этот пример приведен на рис. 5.

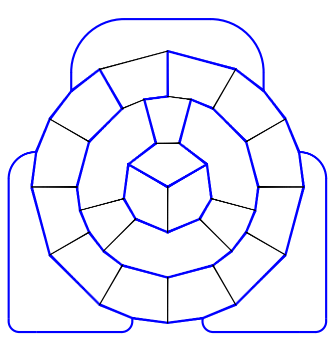

Рис. 5. Многогранник Гринбергса.

Упражнение 8. *Убедитесь в том, что скелет многогранника Гринбергса не является гамильтоновым (см. [1]), но является θ-гамильтоновым.*

Для класса графов многогранников естественно возникают следующик задачи для исследования, аналогичные задачам 1 и 2.

Задача 3. *Существует ли граф многогранника, являющийся K_4-гамильтонвым, но не θ-гамильтоновым.*

На рис. 6 приведен пример многогранника скелет которого является K_4-гамильтоновым.

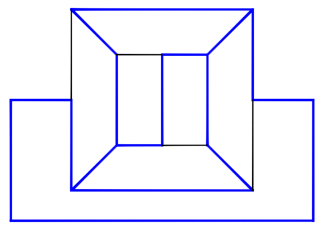

Рис. 6. K_4-гамильтонов многогранник.

Задача 4 (*). *(а) Опишите "иерархию" графов многогранников по их гамильтоновости: когда H-гамильтонов граф многогранника является G-гамильтоновым?*
(б) Верно ли, что для любого графа G существует граф многогранника, не являющийся G-гамильтоновым?
(в) Верно ли, что для любых графов G и H существует гиперболический G-гамильтонов граф, не являющийся H-гамильтоновым?

Задача 5 (*). *Постройте минимальный (по числу граней) граф многогранника, который*
(а) является K_4-гамильтоновым, но не θ-гамильтоновым;
(б) не является K_4-гамильтоновым;
(в) не является H-гамильтоновым ни для какого подграфа H заданного графа G. (Например, для случая $G = K_4$.)

Естественно, в задачах 4 и 5 графы G и H предполагаются планарными.

4. Графы Погорелова

В пространстве Лобачевского $\mathbb{H}^3$ аналогами евклидова куба являются многогранники у которых все двугранные (а следовательно, и все плоские) углы равны $\pi/2$. Интерес к исследованию гамильтоновости и H-гамильтоновости графов прямоугольных многогранников связан с работами [2, 3, 6], где устанавливается связь гамильтоновости многограников с существованием гиперэллиптических инволюций на трехмерных гиперболических многообразиях.

Условия существования прямоугольных многогранников в $\mathbb{H}^3$ были получены в 1967 г. А. В. Погореловым [4].

Теорема 3 (Погорелов). *Для того, чтобы в пространстве Лобачевского $\mathbb{H}^3$ существовал замкнутый выпуклый многогранник с прямыми двугранными углами, имеющий тот же комбинаторный тип, что и заданный многогранник P, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*
(1) в каждой вершине P сходятся три ребра;
(2) каждая грань многогранника P имеет по крайней мере пять сторон;
(3) каждый простой замкнутый контур на поверхности многогранника P, разделяющий какие-либо две его грани, пересекает по крайней мере пять ребер.

Условие (3) означает, что скелет многогранника является *5-связным.*

Многогранник на рис. 7 удовлетворяет условиям (1) и (2) теоремы 3, но не удовлетворяет условию (3), поскольку он обладает замкнутым контуром, разделяющим внутреннюю и внешнюю шестиугольные грани и пересекающим лишь четыре ребра многогранника.

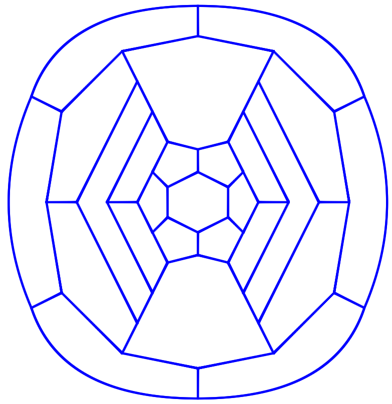

Рис. 7. Пример к теореме Погорелова.

Далее, графы 1-скелетов многогранников, удовлетворяющих условиям теоремы Погорелова будем называть *графами Погорелова.*

Следующие задачи для исследования посвящены графам Погорелова и являются аналогами задач 4 и 5.

Задача 6 (*). *(а) Опишите "иерархию" графов Погорелова по их гамильтоновости: когда H-гамильтонов граф Погорелова является G-гамильтоновым?*
(б) Верно ли, что для любого графа G существует граф Погорелова, не являющийся G-гамильтоновым.
(в) Верно ли, что для любых графов G и H существует G-гамильтонов граф Погорелова, не являющийся H-гамильтоновым?

Задача 7 (*). *Постройте минимальный (по числу граней) граф Погорелова, который*
(а) является K_4-гамильтоновым, но не θ-гамильтоновым;
(б) не является K_4-гамильтоновым;
(в) не является H-гамильтоновым ни для какого подграфа H заданного графа G. (Например, для случая $G = K_4$.)

Естественно, в задачах 6 и 7 графы G и H предполагаются планарными.

Список литературы

[1] У. Болл, Г. Коксетер, *Математические эссе и развлечения* М.: Мир, 1986.
[2] А. Ю. Веснин, А. Д. Медных, *Трехмерные гиперэллиптические многообразия и гамильтоновы графы* Сибирский математический журнал, 1999, Т. 40, № 4, С. 745–763.
[3] А. Ю. Веснин, А. Д. Медных, *Сферические группы Коксетера и гиперэллиптические 3-многообразия*, Матем. заметки, 1999, Т. 66, № 2, С. 173–177.
[4] А. В. Погорелов, *О правильном разбиении пространства Лобачевского*, Матем. заметки, 1967, Т. 1, № 1, С. 3–8.
[5] В. В. Прасолов, *Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии*, М.: МЦНМО, 2004.
[6] A. Mednykh, A. Vesnin, *Colourings of Polyhedra and Hyperelliptic 3-Manifolds.* Recent advances in group theory and low-dimensional topology, 123–131, Res. Exp. Math., 27, Heldermann, Lemgo, 2003.

Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, пр. ак. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090
E-mail address: vesnin@math.nsc.ru