XXI Творческий конкурс учителей по математике
Условия, решения, комментарии и критерии проверки

Каждое задание оценивается, исходя из 10 баллов.

I. Решите задачи

№1. Решите уравнение: $x+\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-1}=4$.

Фольклор, предложил А. Блинков

Ответ: 1,25.

Решение 1. Пусть t = $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\geq 0$, тогда t^2 = $2x+2\sqrt{x^2-1}$. Исходное уравнение примет вид: $t + 0{,}5t^2 = 4 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 8 = 0$, откуда $t = 2$.

Таким образом, $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)^2=4$. Следовательно, $2\sqrt{x^2-1}=4-2x$; $x\leq 2$ и $x^2-1=4-4x+x^2$, откуда $x=\dfrac{5}{4}$.

Решение 2. Из условия следует, что $x \geq 1$. Тогда $\sqrt{x^2-1}$ = $\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}$. Пусть $\sqrt{x+1}=a\geq 0$, $\sqrt{x-1}=b\geq 0$. Если к обеим частям исходного уравнения прибавить по 1, то оно примет вид: $a^2 + b + a + ab = 5$, а если из обеих частей вычесть по 1, то $b^2 + b + a + ab = 3$.

Сложив почленно два получившихся равенства, получим: $a^2 + b^2 + 2a + 2b + 2ab = 8$. Прибавим по 1 к обеим частям этого равенства, тогда $(a + b + 1)^2 = 9$, откуда, учитывая, что выражение в скобках положительно, получим: $a + b = 2$.

Таким образом, $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=2$. Далее – см. выше. Так как в этом решении использовалось следствие, то подстановкой полученного значения в исходное уравнение убеждаемся, что корень не посторонний.

Также можно заметить, что при $x \geq 1$ в левой части уравнения стоит возрастающая функция (сумма возрастающих). Следовательно, уравнение имеет не более одного корня, который можно подобрать.

Критерии проверки.

Приведено полное обоснованное решение – 10 баллов
Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – 8 баллов
Приведено верное в целом рассуждение, содержащее ошибку, не повлиявшую на ответ – 7 баллов
Обосновано возрастание левой части уравнения, указано, что уравнение имеет не более одного корня, который может находиться только в интервале (1; 2), но сам корень не найден или найден неверно – 4 балла
Приведён только верный ответ – 1 балл
Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

№2. В каждом раунде «Своей игры» участвуют три игрока. В полуфинале юбилейного розыгрыша n участников. Каждый играет два раунда так, что его соперниками являются 4 разных игрока, также вышедшие в полуфинал. Найдите все возможные значения n.

А. Блинков

Ответ: любое число, кратное трём и не меньшее шести.

Решение. Так как каждый участник играет дважды, то количество раундов равно $\dfrac{2n}{3}$, откуда следует, что n делится на 3. При этом $n \neq 3$ (иначе возникнет противоречие с условием). Занумеруем участников и приведём примеры их распределения по раундам, удовлетворяющие условию, для $n = 6$ и для $n = 9$.

При $n = 6$: (1; 2; 3), (1; 4; 5), (2; 4; 6), (3; 5; 6).

При $n = 9$: (1; 2; 3), (4; 5; 6), (7; 8; 9), (1; 4; 7), (2; 5; 8), (3; 6; 9).

Любое $n \geq 12$ и кратное трём можно представить в виде $n = 6k + 9m$, где k и m – целые неотрицательные числа, поэтому такое количество участников полуфинала также возможно.

Критерии проверки.

Приведено полное обоснованное решение – 10 баллов

Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности, например, не объяснено, как из примеров для $n = 6$ и $n = 9$ получить примеры для остальных значений n – 8 баллов

Найден и верно обоснован только один из двух основных случаев (6 или 9) – 3 балла

Приведён только верный ответ – 1 балл

Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

№3. Существует ли такая функция f, отличная от постоянной и определённая на R, что для всех действительных x выполняется равенство $f(\sin x) = f(\cos x)$?

Г. Вольфсон

Ответ: существует.

Решение. Приведём два наиболее простых примера.

1) Пусть $f(t) = \left|2t^2 - 1\right|$. Тогда $f(\sin x) = \left|2\sin^2 x - 1\right| = \left|1 - \cos 2x - 1\right| = \left|\cos 2x\right|$ и $f(\cos x) = \left|2\cos^2 x - 1\right| = \left|1 + \cos 2x - 1\right| = \left|\cos 2x\right|$.

2) Пусть $f(t) = t^2\left(1 - t^2\right)$. Тогда $f(\sin x) = \sin^2 x\left(1 - \sin^2 x\right) = \sin^2 x \cos^2 x$ и $f(\cos x) = \cos^2 x\left(1 - \cos^2 x\right) = \cos^2 x \sin^2 x$

*Для построения примеров, аналогичных 2, достаточно выбрать любую функцию вида $g(t) = f(t^2)*f(1 - t^2)$, отличную от постоянной (знак * может означать как сложение, так и умножение). Тогда $g(\sin x) = f(\sin^2 x)*f(1 - \sin^2 x) = f(1 - \cos^2 x)*f(\cos^2 x) = g(\cos x)$.*

Критерии проверки.

Приведено полное обоснованное решение – 10 баллов

Приведён верный пример, но не обосновано, что он удовлетворяет условию – 5 баллов

Указана функция, для которой выполняется требуемое равенство, но её область определения отлична от R – 3 балла

Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

Отметим, что некоторые участники конкурса воспользовались неточностью в формулировке задачи и приводили примеры кусочных функций, которые являлись постоянными на отрезке [–1; 1], а вне этого отрезка постоянными не являлись. Так как неточность формулировки является ошибкой организаторов конкурса, то такие примеры также засчитывались.

№4. В треугольнике ABC через центр I вписанной окружности проведена прямая, перпендикулярная AI, которая пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно. K – середина IE, F – точка пересечения BE и CK. Докажите, что точки B, I, F и C лежат на одной окружности.

Предложил Г. Филипповский

Решение 1. Пусть $\angle BAC = \alpha$, тогда $\angle BIC = 90° + 0{,}5\alpha$ (угол между биссектрисами, см. рис. 4а). Значит, достаточно доказать, что $\angle BFC = 90° + 0{,}5\alpha$.

Из условия следует, что треугольник DAE равнобедренный с углом α при вершине, поэтому $\angle BDI = \angle CEI = 90° + 0{,}5\alpha$. Обозначим углы B и C треугольника ABC через β и γ соответственно, тогда $\angle DBI = 0{,}5\beta$, $\angle DIB = 0{,}5\gamma$ (по теореме о сумме углов треугольника). Тогда $\angle CIE = 0{,}5\beta = \angle DBI$. Таким образом, треугольники DBI и EIC подобны (по двум углам).

Проведём медиану IM треугольника DBI, тогда $\angle KCE = \angle MID$ (углы между соответствующими медианой и стороной в подобных треугольниках). Но $\angle MID = \angle BED$, так как MI – средняя линия треугольника BED. Значит, треугольники KFE и KEC подобны (угол K – общий, $\angle KEF = \angle KCE$). Следовательно, $\angle BFC = \angle EFK = \angle CEK = 90^\circ + 0{,}5\alpha$, что и требовалось.

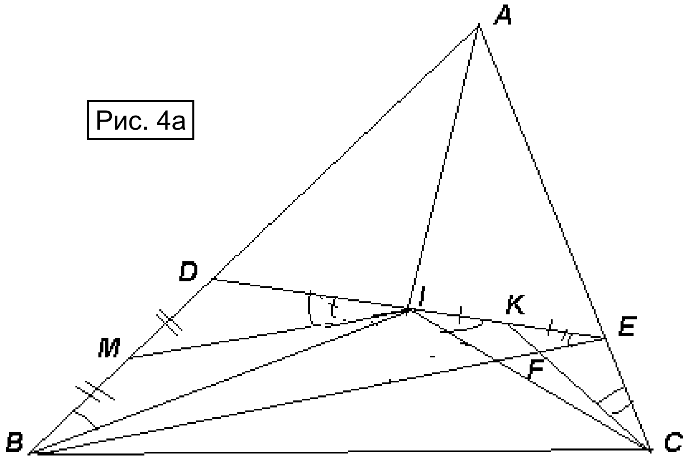


Рис. 4а

Также можно не проводить медиану IM, а из подобия треугольников DBI и EIC получить, что $BD \cdot EC = DI \cdot IE$, но $DI \cdot IE = DE \cdot KE$ поэтому $BD \cdot EC = DE \cdot KE$. Из этого равенства следует подобие треугольников BDE и KEC, так как углы D и E этих треугольников равны. Из этого подобия, в свою очередь, следует равенство углов для подобия треугольников KFE и KEC.

Решение 2. Равенство углов CEI и BIC доказывается аналогично (см. Решение 1). Так как CI – биссектриса угла C, то треугольники CEI и CIB подобны (по двум углам). Пусть L – середина IB (см. рис. 4б). Докажем, что четырехугольник $CKIL$ – писанный.

Действительно, CK – медиана треугольника CEI, CL – медиана треугольника CIB. Соответствующие углы между медианой и стороной в подобных треугольниках равны. Поэтому равны углы CKE и CLI. Следовательно, четырехугольник $CKIL$ – вписанный.

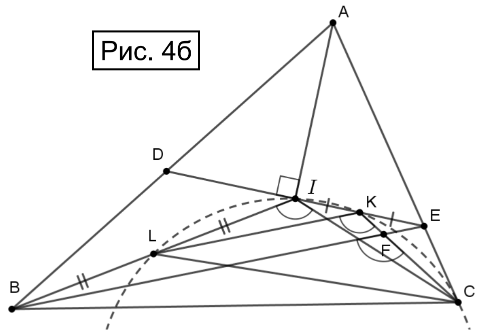


Рис. 4б

KL – средняя линия треугольника EBI, следовательно, $KL \parallel BE$. Тогда $\angle CFB = \angle CKL$, а $\angle CKL = \angle CIL$ (вписанные углы, опирающиеся на одну дугу). Таким образом, $\angle CFB = \angle CIB$. Следовательно, четырехугольник $CFIB$ – вписанный, что и требовалось.

Решение 3. Построим окружность, описанную около треугольника BIC. По лемме о трезубце ее центр O – точка пересечения биссектрисы AI с описанной окружностью треугольника ABC (см. рис. 4в).

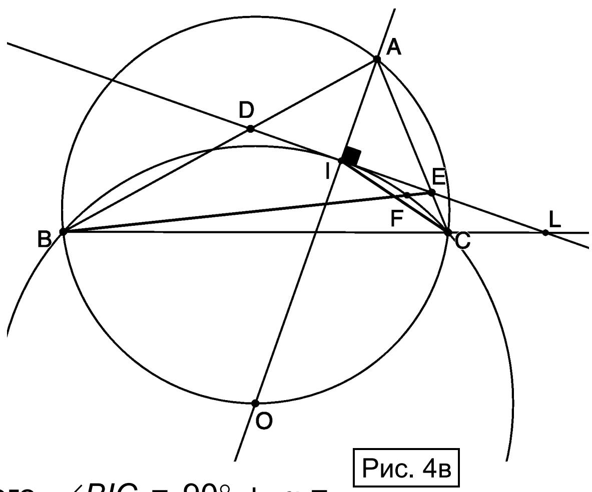


Рис. 4в

Пусть F – точка пересечения отрезка BE и окружности, описанной около треугольника BIC. Докажем, что прямая CF содержит медиану CK треугольника CEI, тогда F – точка из условия задачи.

Заметим, что IL – касательная к окружности, описанной около треугольника BIC.

Пусть угол $\angle ECI = \gamma$, $\angle FCI = \angle FBI = \angle FIE = x$, $\angle BAI = \angle CAI = \alpha$, тогда $\angle ECI = \gamma - x$. Кроме того, $\angle BIC = 90^\circ + \alpha = \angle IEC$. Из треугольника EIC получим, что $\angle EIC = 90^\circ - \alpha - \gamma = \angle ABI$. Тогда $\angle EIF = 180^\circ - 90^\circ - \alpha - \angle ABI - x = \gamma - x = \angle ECF$, откуда следует, что окружность, описанная около треугольника EFC касается прямой EI. Значит, F – это точка Шалтая для треугольника IEC, поэтому она лежит на его медиане CK, что и требовалось.

Отдельно отметим, что на той же окружности, описанной около CFIB, лежит также точка пересечения CD и BN, где N – середина ID.

<u>Критерии проверки</u>.

Приведено полное обоснованное решение – 10 баллов

Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – 8 баллов
Доказано подобие любых двух треугольников из DBI, EIC и IBC, но дальнейших продвижений нет, либо они неверны – 2 балла
Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

№5. В кошельке находятся монеты разного номинала в тугриках. Может ли оказаться, что набрать ими сумму в 2024 тугрика можно ровно 2024 способами?

Предложил А. Грибалко (по задаче из Канадской олимпиады 2020 г.)

Ответ: может.

Решение 1. Положим в кошелек сначала 11 «легких» монет номиналом 1, 2, 4, 8, 16, 25, 26, 27, 28, 29, 30 тугриков. Из них можно получить ровно 2^{11} = 2048 комбинаций с разными суммами, причём по крайней мере 24 суммы (0, 1,…, 23) получаются ровно одним способом. Добавим теперь в кошелек «тяжелые» монеты номиналом 2000, 1999, … , 1828 тугриков (1828 = 2024 – (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 25 + 26 + 27 + 28 + 29 + 30).

Теперь каждую комбинацию лёгких монет, кроме двадцати четырёх (с суммами 0, …, 23), можно дополнить до 2024 ровно одним способом. То есть всего получить 2024 можно ровно 2^{11} – 24 = 2024 способами.

Решение 2. Возьмём сначала монеты номиналами 1, 2, …, 11 тугриков, которые назовём лёгкими, а также 1958, 1959, …, 2023 тугрика, которые назовём тяжёлыми. Из лёгких монет можно собрать 2047 непустых наборов с суммой от 1 до 66 тугриков. Для каждого такого набора есть единственная тяжёлая монета, которую нужно добавить, чтобы получить сумму 2024 тугрика. Таким образом, для указанного набора есть 2047 способов. Выкинем из него тяжёлые монеты вида 2024 – n, где n = 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Количество способов набрать соответствующие суммы n лёгкими монетами равно 1, 2, 2, 3, 4, 5, 6 соответственно, поэтому останется 2047 – 1 – 2 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 = 2024 способа.

Решение 3. Пусть в кошельке лежат монеты в 2, 4, 8, 2010, 2012, 2014, 2016, 2018, 2020, 2022, 2024 тугрика и всех нечётных номиналов от 505 до 1519 тугриков. Назовём монеты в 2, 4 и 8 тугриков лёгкими, от 505 до 1519 тугриков – средними, а остальные – тяжёлыми. Рассмотрим какой-то набор монет, дающий сумму 2024 тугрика.

Если он не содержит тяжёлых монет, то в нём должно быть ровно две средние монеты. Действительно, их должно быть чётное количество, причём хотя бы две. А если бы их было хотя бы четыре, то сумма их номиналов была бы не меньше, чем 505 + 507 + 509 + 511 > 2024. Из трёх лёгких монет можно составить восемь наборов, дающих суммы 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 тугриков. Значит, из средних монет нужно взять две с суммой номиналов 2010, 2012, 2014, 2016, 2018, 2020, 2022 или 2024. Это можно сделать 250, 251, 251, 252, 252, 253, 253, 254 способами соответственно, что дает в сумме 2016 способов.

Если же набор монет содержит тяжёлую монету, то ровно одну. При этом есть единственный вариант, какие лёгкие монеты нужно к ней добавить, чтобы получить 2024 тугрика. Значит, этот случай дает ещё восемь способов, а всего их 2016 + 8 = 2024.

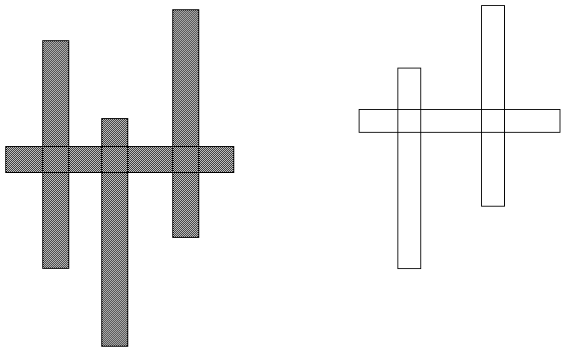
Критерии проверки.

Приведено полное обоснованное решение – 10 баллов
Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – 8 баллов
Есть верные идеи решения, но оно до конца не доведено или в нём есть ошибки – 1-3 балла
Приведён только ответ – 0 баллов
Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

II. Методический блок

№6. *В работе для поступающих в 5 класс предлагалась задача:*

Накладывая друг на друга одинаковые прямоугольники периметра 46 см, составили две фигуры (см. рисунки). Серая фигура имеет периметр 148 см. Найдите периметр белой фигуры.



Проверяющим попались две нестандартные работы с верными ответами.

Решение Саши:

1) 148 – 46 =102 (см) – без целого прямоугольника
2) 102 : 3 = 34 (см) – один нецелый
3) 34·2 = 68 (см) – два нецелых
4) 68 + 46 = 114 (см) – периметр белой фигуры.

Ответ: 114 см.

Решение Наташи:

1) 148 : 46 = 3 (ост 10)
2) (46 – 10) : 12 = 3 (см) – ширина
3) 46·3 – 3·8 = 138 – 24 = 114 (см)

Ответ: 114 см.

Помогите приёмной комиссии разобраться с каждой работой: решение ребёнка логичное (хотя и не вполне понятно записано) или же верный ответ получен случайно?

Предложил А. Хачатурян

Комментарий. Верные ответы в обоих случаях не случайны, но понять логику решения каждого ребёнка непросто.

В своём решении Саша выделяет в серой фигуре горизонтальный прямоугольник и удаляет его. Остаётся три «нецелых» прямоугольника, у каждого из которых на длинных сторонах есть «дырки» шириной в короткую сторону. Кроме того, Саша вычитает целый периметр горизонтального прямоугольника, поэтому каждый вертикальный теряет ещё две короткие стороны. Фактически «нецелый прямоугольник» – это пара длинных сторон с дыркой на каждой. Саша находит периметр одного такого куска, а потом проделывает с белой фигурой аналогичные действия.

В решении Наташи пояснений практически нет, поэтому понять его сложнее. Деление с остатком периметра серой фигуры на периметр прямоугольника можно интерпретировать так: в общем периметре укладываются целиком периметры трёх вертикальных прямоугольников, если каждый из них «займёт» по две ширины от той части периметра, которую вносит горизонтальный прямоугольник. Остаток от деления представляет собой периметр горизонтального прямоугольника без шести «дырок» в длинных сторонах и шести «занятых» отрезков той же длины. Это объясняет, почему во втором действии верно найдена ширина прямоугольника.

Наташа могла рассуждать и по-другому. Если бы горизонтальный прямоугольник вообще не пересекался с вертикальными, то периметр финуры равнялся бы учетверённому периметру прямоугольника. Но в реальности он меньше именно на периметр трёх квадратов-пересечений. Поэтому Наташа, вычитая из периметра остаток, находит именно эту величину.

У Наташиного решения есть ещё одна проблема – оно работает только если прямоугольники достаточно узкие. Если ширина по отношению к длине достаточно велика (настолько, что ширина, взятая 12 раз, превышают периметр), то её рассуждения не проходят (а картинку нарисовать можно). Однако, разбирая решение девочки, стоит учитывать, что она видела конкретный чертёж и строила рассуждения, исходя из него.

<u>Критерии проверки</u> (*баллы за 1) и 2) суммируются*).

1) Указано, что решение Саши логично, верно описано, что такое «нецелые» прямоугольники и как Саша с ними оперирует – 5 баллов

Указано, что его решение логично, описано, что Саша делает с «нецелыми» прямоугольниками, но сами эти «нецелые» прямоугольники либо не описаны, либо описаны неверно – 3 балла

Указано, что решение логично, а его правильность показана алгебраически – 3 балла
Указано только, что решение логично – 1 балл
2) Указано, что решение Наташи логично и верно описано, как она могла рассуждать – 5 баллов
Указано, что решение логично, а его правильность показана алгебраически – 3 балла
Указано, что решение неверно, потому что не работает для некоторых видов прямоугольников – 3 балла
Указано только, что решение логично – 1 балл

В заданиях №№7 – 9 могут содержаться математические ошибки и недочёты (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Укажите, корректно ли условие «задачи». Если оно некорректно, то объясните, почему это так. Если неверно «решение», то укажите все ошибки и недочёты, поясните их суть, а затем приведите верное решение.

№7. «Задача». Пусть a, b, c – такие натуральные числа, что НОК(a, b, c) = $a + b + c$. Докажите, что среди этих чисел есть чётное.

«Решение». Заметим, что если у данных трёх чисел есть общий делитель, то на него можно разделить обе части равенства. Поэтому можно считать, что числа a, b, c в совокупности взаимно простые. Тогда НОК(a, b, c) = abc. Значит, достаточно доказать, что из равенства $abc = a + b + c$ следует, что хотя бы одно из чисел a, b, c является чётным. Действительно, пусть $a \le b \le c$, тогда $a + b + c \le 3c$, поэтому $ab \le 3$. Если $a = b = 1$, то $c = c + 2$, что неверно. А если $ab = 3$, то $a = b = c$, но тогда $ab \ne 3$. Противоречие. Значит, $ab = 2$, поэтому хотя бы одно из этих чисел чётное.

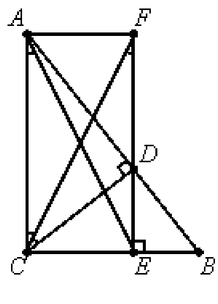
Комментарий. Условие «задачи» корректно: сформулировано верное утверждение. При этом «решение» опирается на факт, неверный в общем случае: «Если три числа a, b, c взаимно простые, то НОК(a, b, c) = abc». Пусть, например, a =2, b = 3, c = 6, тогда НОК(a, b, c) = 6. Но в условиях данной задачи из взаимной простоты трёх чисел следует их попарная взаимная простота. Действительно, если два из трех чисел a, b, c имеют общий делитель $p > 1$, то и НОК(a, b, c) имеет тот же делитель, тогда из равенства НОК(a, b, c) = $a + b + c$ следует, что и третье число кратно p. Таким образом, равенство НОК(a, b, c) = abc в данном случае будет верным и дальнейшие рассуждения также верны.

<u>Критерии проверки</u> (*баллы суммируются*).
Указано, что условие «задачи» корректно – 1 балл
Верно указана ошибка в «решении» – 2 балла
Приведён контрпример, объясняющий суть этой ошибки – 3 балла
Верно объяснено, почему в данном случае дальнейшие рассуждения верны или приведено другое верное решение – 4 балла

№8. «Задача». В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CD, а из точки D опущен перпендикуляр DE на катет BC. Найдите угол BAC, если известно, что $AC = CD + DE$ и $\angle CAE = 22°$.

«Ответ». 46°.

«Решение». Построим прямоугольник $ACEF$ и проведём его диагональ CF (см. рисунок). Тогда $\angle ACF = \angle CFE = \angle CAE$. Так как $FD = FE - DE = AC - DE = CD$, то треугольник CDF равнобедренный и $\angle FCD = \angle CFD = \angle CAE$. Значит, $\angle ACD = \angle ACF + \angle FCD = 2\angle CAE = 44°$, а $\angle BAC = 90° - \angle ACD = 46°$.



Комментарий. Условие «задачи» некорректно, так как описанная в условии конструкция не существует. Действительно, если D – основание перпендикуляра и выполнено равенство $AC = CD + DE$, то угол CAE не может быть равен 22°.

Рассуждения, приведённые в «решении» до вычисления конкретных значений углов, верные. Поэтому, если $\angle CAE = \alpha$, $AC = b$, то $CD = b\cos 2\alpha$, $DE = CD\sin(90° - 2\alpha) = b\cos^2 2\alpha$.

По условию о сумме отрезков получим: $\cos^2 2\alpha + \cos 2\alpha = 1$, откуда $\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Вместе с тем, $\cos 44^\circ > \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, так как $\left(\sqrt{2}+1\right)^2 > \left(\sqrt{5}\right)^2 \Leftrightarrow 3+2\sqrt{2} > 5$. Противоречие.

Критерии проверки.

Указано, что условие «задачи» некорректно и приведено верное и полное обоснование – 10 баллов

Указано, что условие «задачи» некорректно, но обосновано это не строго, так как используются приближённые значения выражений вместо оценки в виде неравенств – 4 балла

Указано, что условие «задачи» некорректно, но это никак не обосновано или обосновано неверно – 1 балл

№9. «Задача». Даны три попарно скрещивающиеся прямые. Расстояние между каждыми двумя равно *a*. Найдите площадь параллелограмма, две соседние вершины которого расположены на одной прямой, а две оставшиеся – на двух других прямых.

«Ответ»: $a^2\sqrt{2}$

«Решение». Данные в условии прямые содержат скрещивающиеся рёбра параллелепипеда, а так как расстояния между каждыми двумя из этих прямых равны, то этот параллелепипед – куб. Пусть это куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, а AB, B_1C_1 и DD_1 – указанные прямые, которые попарно перпендикулярны. Если две вершины параллелограмма лежат, например, на прямой AB, то две другие должны лежать на прямой, параллельной AB, то есть на прямой, которая перпендикулярна и B_1C_1, и DD_1. Эта прямая должна пересекать обе указанные прямые, значит, она содержит общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым B_1C_1 и DD_1. Следовательно, это прямая C_1D_1, а две вершины параллелограмма, лежащие на этих прямых, – это вершины C_1 и D_1 куба. Тогда противоположная сторона параллелограмма – это ребро AB. Таким образом, параллелограмм, указанный в условии, – это прямоугольник ABC_1D_1, площадь которого очевидно равна $a^2\sqrt{2}$.

Предложил Д. Прокопенко

Комментарий. Условие «задачи» некорректно, так как площадь указанного параллелограмма однозначно не определяется. В «решении» без всякого обоснования утверждается, что три данные попарно скрещивающиеся прямые содержат рёбра куба, а это неверно.

Приведем контрпример. Рассмотрим параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в основании которого ромб $ABCD$ с высотой *a*, ребро AA_1 перпендикулярно основанию и также равно *a* (см. рис. 9). Тогда попарные расстояния между скрещивающимися прямыми AA_1, CD и B_1C_1 равны *a*. Искомым параллелограммом может, например, служить прямоугольник AA_1CC_1. Его площадь будет равна $a \cdot AC$. Так как AC – диагональ ромба $ABCD$ с **высотой** *a*, то она может быть любой длины, не меньшей *a*. Поэтому искомая площадь может быть равна любому числу, которое не меньше чем a^2.

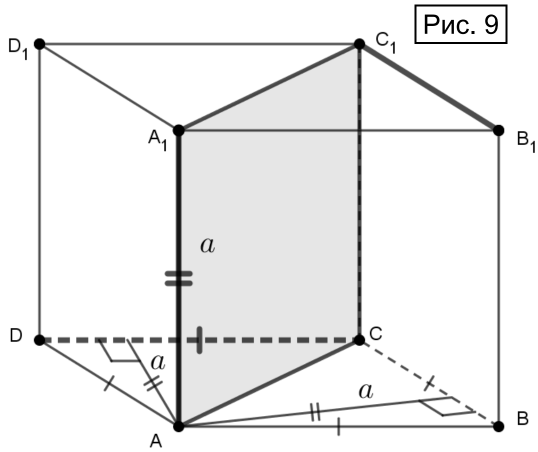


Рис. 9

Отметим, что равенство попарных расстояний между скрещивающимися рёбрами параллелепипеда равносильно равновеликости его граней (это следует из формулы для вычисления его объёма). Поэтому в качестве контрпримера можно рассматривать любой параллелепипед с равновеликими гранями, отличный от куба.

Критерии проверки (*баллы суммируются*).

Указано, что условие «задачи» некорректно – 1 балл

Указано, что «ответ» неверный – 1 балл
Правильно указано неверное утверждение в «решении» – 2 балла
Приведён и обоснован контрпример – 4 балла
Объяснено, почему «ответ» однозначно не определяется – 2 балла

№10. *Ученик нашёл в книге задачу и её решение.*
Задача. Имеются 13 гирек, на которых указаны массы 1 г, 2 г, ..., 13 г. Масса одной из них отличается от того, что на ней написано, но неизвестно, в какую сторону. На остальных гирьках массы указаны верно. Как за три взвешивания на чашечных весах найти неправильную гирьку?
Решение. Можно сделать такие взвешивания:
1) 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 8 сравнить с 6 + 7 + 10.
2) 1 + 2 + 3 + 6 + 9 + 10 сравнить с 8 + 11 + 12.
3) 1 + 5 + 7 + 9 + 12 сравнить с 3 + 8 + 10 + 13.

Чтобы проверить правильность алгоритма, достаточно убедиться, что никакие две гирьки не оказываются каждый раз либо на одной чаше, либо на противоположных чашах, либо одновременно отложенными.

Ученик пришёл к учителю и спросил: «Что за ерунда здесь написана? Гирьки 1 г и 3 г каждый раз либо на одной чаше, либо на противоположных. Значит, алгоритм неверен, зачем тогда автор его приводит?».
1) Посоветуйте учителю, как уточнить подчёркнутые слова, чтобы получился правильный способ проверки алгоритма.
2) Как ещё можно проверить приведённый алгоритм?

Предложила И. Раскина

Комментарий. Каждая из 13 гирек может оказаться как лёгкой, так и тяжёлой. Поэтому всего возможны 26 случаев. Кратко их можно записать так: 1л, 1т, 2л, 2т, … 13л, 13т (добавление «л» означает, что гиря легче, чем написанная на ней масса, а добавление «т» – что она тяжелее). Сами же гири будем указывать числами (как в решении). Заметим также, что при каждом взвешивании каждая гиря находится в одном из трёх состояний: лежит на левой чаше весов («слева»), лежит на правой чаше («справа») или отложена.

1) Рассмотрим произвольную пару гирь, например, 1 и 2. В двух первых взвешиваниях обе гири слева, что не позволяет различить случаи 1л и 2л (а также 1т и 2т). Если бы и при третьем взвешивании эти гири оказались на одной и той же чаше весов, то эти случаи остались бы неразличимыми. Если при третьем взвешивании эти гири обе отложены, то эти случаи также неразличимы. В данном алгоритме при третьем взвешивании гиря 1 слева, а гиря 2 отложена, так что случаи 1л и 2л в итоге различимы (как и случаи 1т и 2т). Вообще, чтобы различать такие случаи для всех гирь, надо проверить вот что: никакие две гирьки не оказываются каждый раз либо на одной чаше, либо одновременно отложенными.

Аналогично, второе и третье взвешивания без первого не позволили бы различить случаи 1т и 8л (а также случаи 1л и 8т). Чтобы различать и случаи этого типа, надо проверить вот что: никакие две гирьки не оказываются каждый раз либо на противоположных чашах, либо одновременно отложенными.

Таким образом, корректно было бы написать так:
«Чтобы проверить правильность алгоритма, достаточно убедиться в двух условиях.
Первое: никакие две гирьки не оказываются каждый раз либо на одной чаше, либо одновременно отложенными.
Второе: никакие две гирьки не оказываются каждый раз либо на противоположных чашах, либо одновременно отложенными."

Всего 45 пар гирек. Казалось бы, проверка 90 условий недопустимо трудоёмка. Но сами условия очень просты и могут проверяться большими группами. Покажем это на примере первого условия для пар с гирей 13. Она находится на одной чаше только с гирями 3, 8 и 10 (в третьем взвешивании). Каждая из гирь 3, 8, 10 участвует в первом взвешивании, а 13 в нём отложена. Вот и проверены уже 12 условий.

2) Альтернативный способ проверки состоит в выписывании результатов всех трёх взвешиваний для каждого из 26 случаев. Для этого удобна таблица из двух строк и двадцати семи столбцов. В первую строку запишем по порядку 27 возможных результатов (<<<, <<=, <<> и т. д.). Вторую удобнее заполнять, перебирая по порядку случаи: 1л запишем под <<<, 1т – под >>>, 2л – под <<=, 2т – под >>=, 3л – под <<> и т. д.

Если ни в одной из клеток второй строки не окажется более одного случая, то есть результат трёх взвешиваний однозначно определяет, какая гирька имеет неверную массу и в какую сторону, то алгоритм верен. По условию задачи требуется найти неправильную гирьку, но не обязательно определять, в какую сторону её масса отличается от заявленной. Однако случаи типа 1л и 1т приведённый алгоритм заведомо различает, поскольку никакая гирька не оказывается все три раза отложенной. Так что можно уточнить: приведённый алгоритм верен тогда и только тогда, когда клетка под === окажется пустой, а во всех остальных клетках окажется ровно один случай.

Критерии проверки (*баллы суммируются*).

Верно указано, как надо исправить подчёркнутые слова – 3 балла

Указанное исправление обосновано – 3 балла

Хорошо описан альтернативный способ проверки алгоритма – 4 балла (если он упомянут, но описан невнятно, то 2 балла)