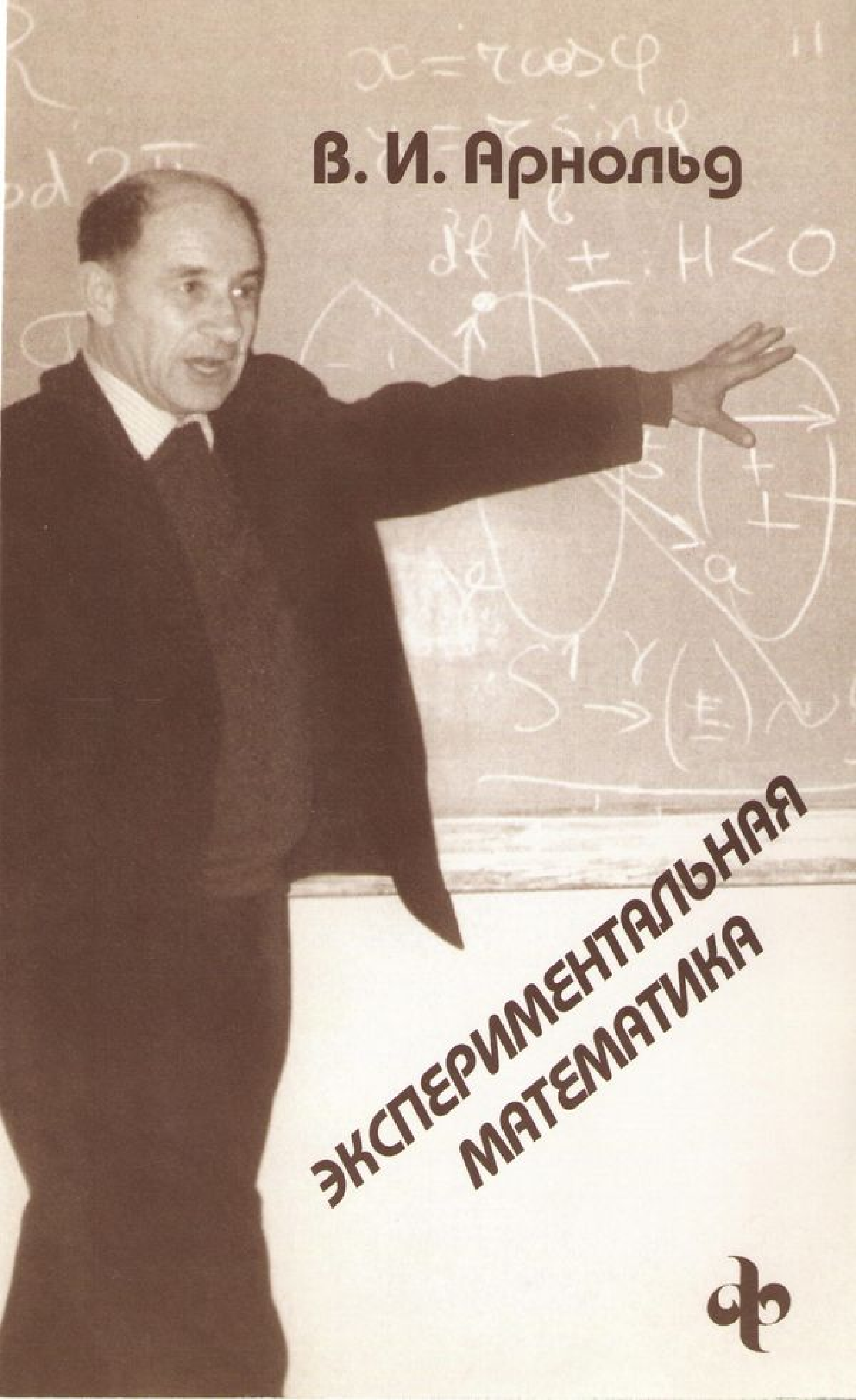
В. И. Арнольд

Экспериментальная математика



В. И. Арнольд

Экспериментальная математика

ФАЗИС
Москва 2005

Издание поддержано фондом
«КНИГА–НАУКА–КУЛЬТУРА»

Арнольд В.И.
Экспериментальная математика.
— М.: ФАЗИС, 2005. 63 с.
ISBN 5-7036-0105-3

В семинаре института математики Университетов Париж-6 и Париж-7 15.06.2005 мнение автора, что студентов следует учить, что $7 \cdot 8 = 56$, оспаривалось коллегами-французами, предпочитающими учить их, что $7 \cdot 8 = 8 \cdot 7$.

Автор не думал, что его речь в пользу сохранения обучения математике нужна в России, где с ним и так все согласны, пока не прочёл в *Известиях* (№101, «Наука», 17.06.2005, с. 16), будто «математика, в отличие от других наук, не имеет дела с привычным миром».

Поэтому теперь этот (первоначально предназначавшийся для малограмотных французских коллег) текст предлагается российскому читателю (имея в виду скорее читателя, интересующегося привычным миром естественных наук, чем математических снобов).

Издательство ФАЗИС
Почтовый адрес: 123557 Москва, Пресненский вал, 42-44
e-mail: publisher@phasis.ru *http*://www.phasis.ru

Типография «Наука» Академиздатцентра РАН
121099 Москва Г-99, Шубинский пер., 6
Заказ № 1632

ISBN 5-7036-0105-3

Но мы пощажены не будем,
Когда её не утаим:
Да, простота нужнее людям,
Но сложное понятней им.

Б. Л. Пастернак

Вопреки мнению большинства современных математиков, я, вслед за Пуанкаре, считаю математику частью физики, то есть экспериментальной наукой. Слово «математика» означает «точное знание», и соответствующие открытия были получены из наблюдений явлений природы.

Два основных метода мышления — это индукция, выводящая общие законы из их частных проявлений, и дедукция, доставляющая частные случаи выполнения общих правил. Лейбниц говорил, что, в то время как к индукции способны животные (вроде собак Павлова), дедукция доступна только человеческим существам (подобным членам правового общества, подчиняющимся адвокатам и судьям).

Например, доказав, что дифференциал суммы равен сумме дифференциалов слагаемых, Лейбниц немедленно сформулировал общий алгебраический закон, утверждающий, что дифференцирование — гомоморфизм кольца функций. Эта его ошибка объясняет термин «формула Лейбница» для производной от произведения: он следовал в развитии алгебры дифференциального исчисления своему ошибочному правилу несколько месяцев (и даже обучал ему своего возражавшего ученика, Бернулли).

Подобная ошибка была бы совершенно невозможна для Ньютона, экспериментатора, хорошо знавшего закон Архимеда $d(x^2)/dx = 2x$ из рис. 1.

Экспериментальная математика сразу показывает, что площадь $(dx)^2$ гораздо меньше, чем заштрихованная площадь $d(x^2)$.

Лейбниц был первым учеником Ньютона, совершившим стандартную ошибку студентов «$d(x^2) = (dx)^2$», обеспечив себе этим имя автора правильной формулы

$$d(uv) = udv + (du)v.$$

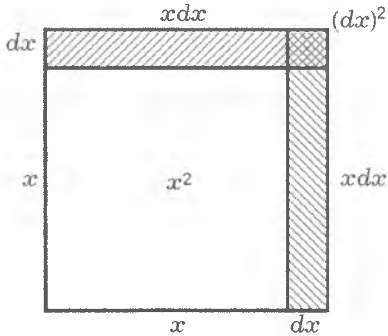


Рис. 1. Экспериментальное опровержение Ньютоном «правила Лейбница».

Интересно, что экспериментальный факт рисунка 1 отсутствует даже в лучших учебниках анализа и геометрии. Формула

$$\partial(X \times Y) = ((\partial X) \times Y) + (X \times (\partial Y))$$

для границы прямого произведения двух многогранников или цепей — в сущности, то же самое «правило Лейбница» (при соответствующих ориентациях цепей).

Инфинитезимальный аналог той же самой формулы $L = id + di$, то есть $L_v = (i_v \circ d) + (d \circ i_v)$, выражает производную Ли[1] L_v вдоль векторного поля v через внешнее дифференцирование d и подстановку i_v аргумента v в дифференциальную форму.

Эта «формула гомотопии» обычно доказывается в учебниках формально-дедуктивными вычислениями в координатной системе. Наивный экспериментально-физический и геометрический смысл формулы гомотопии (как и формулы для границы произведения) всегда тщательно скрывается от студентов (видимо, ради повышения авторитета преподавателей, сообщающих студентам эту могущественную формулу).

Точно так же, обычное дедуктивное определение определителя матрицы делает всю теорию определителей совершенно непонятной. На самом деле определитель — это (ориентированный)

[1] Производная Ли называется также производной рыбака: рыбак сидит на месте и дифференцирует по времени проносимый мимо него потоком векторного поля v тензор. Без помощи этого потока пришлось бы сравнивать приложенные в разных точках тензоры, и их разность не имела бы смысла, как разность элементов разных векторных пространств.

объём параллелепипеда, рёбрами которого являются векторы — столбцы матрицы.

Конечно, формально-алгебраические дедукции свойств сложных многочленов, которые называются определителями в учебниках алгебры, возможны. Но настоящее понимание так не достигается: «выучить ещё не значит понять» — говорил Р. Том.

Перечисляя трудные определения, которыми мучают студентов, я упомяну ещё три столь же фундаментальных понятия: *группы*, *многообразия* и *алгоритмы*.

Формально-математическое определение *группы* включает две операции на этом множестве, удовлетворяющие дюжине легко забываемых аксиом.

Понятное определение доставляется экспериментальной математикой: *группой преобразований* называется набор преобразований (взаимно-однозначных отображений на себя) некоторого вспомогательного множества, в который вместе с каждыми двумя преобразованиями входит их произведение (последовательное выполнение: символом ab обозначают выполнение сначала преобразования b, а потом преобразования a, как для действия операторов на векторы) и вместе с каждым преобразованием входит обратное преобразование.

Все *аксиомы* сложного дедуктивно-алгебраического определения — это просто (очевидные) свойства групп преобразований, то есть легко доказываемые *теоремы* (экспериментально очевидные), например $(ab)c = a(bc)$ или $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ (поскольку, если пиджак одет *после* одевания рубашки, то для раздевания нужно снять его *до* снятия рубашки).

Между группами преобразований (разных объектов) существуют иногда важные отображения, называемые *гомоморфизмами* (для которых образ произведения двух преобразований есть произведение образов этих преобразований).

Например, группа симметрий куба (их 48) действует и на его 4 большие диагонали. Это действие определяет гомоморфизм группы из 48 специальных перестановок восьми вершин куба (доставляющих симметрии куба) в группу перестановок четырёх больших диагоналей.

Таких перестановок 24, и все они доставляются сорока восемью симметриями куба (и даже двадцатью четырьмя его вращениями) — это уже содержательный факт теории групп (и лёгкое упражнение для дошкольников).

Абстрактной группой называется группа преобразований, рассматриваемая с точностью до изоморфизмов (изоморфизмами называются гомоморфизмы, обратные к которым тоже являются гомоморфизмами).

Например, группа 24 вращений куба изоморфна группе 24 перестановок четырёх его больших диагоналей. Соответствующая абстрактная группа называется симметрической группой $S(4)$.

А. Кэли доказал несколько столетий назад, что дедуктивные алгебраические описания абстрактных групп (придуманные как обобщения наивных групп преобразований) не доставляют на самом деле *ничего нового*: все группы, удовлетворяющие аксиомам алгебраистов, изоморфны некоторым группам преобразований.

К несчастью, эта победа экспериментальной математики над аксиоматически-дедуктивной схоластикой, так затрудняющей изучение математики, не повлияла на педагогическую практику алгебраистов, и в учебниках алгебры отсутствует приведённый выше анализ понятия абстрактной группы (зато доказывается единственность единицы и совпадение левой единицы абстрактной группы с правой единицей).

Что касается понятия многообразия, то элементарными объектами экспериментальной математики являются *подмногообразия евклидовых пространств* (например, прямые и плоскости, окружности и сферы, эллипсы и гиперболы, графики разных функций, вроде экспоненты и логарифма, синуса и тангенса).

Гомеоморфизмы и *диффеоморфизмы* между такими (топологическими или гладкими) подмногообразиями легко определяются (условиями непрерывности или дифференцируемости функций, задающих гомеоморфизмы или диффеоморфизмы в локальных координатах).

Абстрактное топологическое (гладкое) многообразие — это подмногообразие евклидова пространства (любой размерности), рассматриваемое с точностью до гомеоморфизма (до диффеоморфизма) подмногообразий евклидовых пространств.

Абстрактные (и трудные) определения многообразий, которые читатель может найти в учебниках, занимают много страниц. Но в теории многообразий имеется *теорема Уитни*, подобная теореме Кэли в теории групп: *попытка обобщить наивно-экспериментальные подмногообразия евклидовых пространств не приносят ничего нового*, так как все «абстрактные многообразия» аксиомофилов гомеоморфны (в топологическом случае) или диффеоморфны (в гладком случае) некоторым наивно-экспериментальным подмногообразиям евклидовых пространств нужных размерностей.

В случае *алгоритмов* элементарным объектом является *машина Тьюринга.* Теоремы Кэли и Уитни заменены в этом случае *тезисом Чёрча*: все попытки придумать более общее определение алгоритма не дали ничего нового, всё, что способны делать (дедуктивно определяемые) «абстрактные алгоритмы», может быть сделано также и стандартной машиной Тьюринга (работающей достаточно длительное время с достаточно длинной конечной программой).

Мой вывод из всех этих примеров состоит в том, что *пора вернуться к элементарным объектам экспериментальной математики в преподавании студентам трудных теорий современной математики.*

К длинному перечню ошибок Лейбница я хотел бы добавить сейчас ещё два примера.

Изучая окружность кривизны гладкой кривой общего положения на евклидовой плоскости, Лейбниц пришёл к выводу, что она пересекает кривую (в точке касания) в *четырёх* бесконечно близких точках (в то время как касательная прямая в обычной точке кривой пересекает её в двух бесконечно близких точках).

По-видимому, Лейбниц не пытался нарисовать эту окружность кривизны. Ньютон, например, прекрасно понимал, что парабола переходит с одной стороны «оскулирующей окружности» на другую (в общей точке параболы), вследствие чего число бесконечно-близких точек пересечения оскулирующей окружности с параболой *нечётно* (на самом деле оно равно 3, а не 4, см. рис. 2).

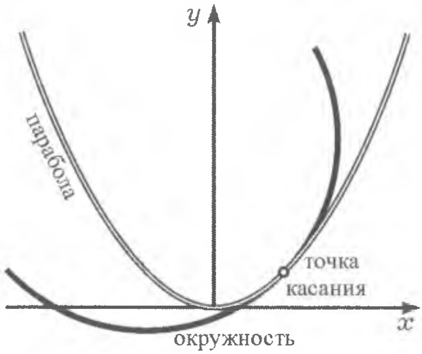


Рис. 2. Оскулирующая окружность параболической кривой.

Эти экспериментальные факты были, конечно, хорошо известны и другим математикам (например, Гюйгенсу и Леонардо да Винчи), да и художникам (вызывая странные формы видимых контуров, например контуров тог, а также вызывая особенности на каустиках и на волновых фронтах, на циклоидах и на астроидах (рис. 3)).

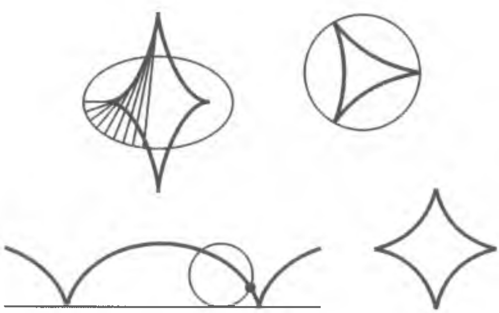


Рис. 3. Каустика (огибающая нормалей) эллипса, гипоциклоида, циклоида и астроида.

Другая странная ошибка Лейбница опубликована недавно в его критике «Математических начал натуральной философии» Ньютона. Ньютон пытался указать «лучшую» кривую для планетной орбиты, для которой закон Кеплера о заметённой радиус-вектором площади доставлял бы более лёгкое, чем для эллиптических орбит, уравнение для определения положения планеты на орбите в каждый момент времени.

Вывод Ньютона состоял в том, что не существует такой орбиты, для которой площадь сегмента (или сектора), отсекаемого прямой, была бы алгебраической функцией от отсекающей прямой.

Лейбниц предъявил контрпример к теореме Ньютона, пометив на полях своего экземпляра Principia против этой теоремы: «ERROR».

На самом деле, однако, доказательство Ньютона было правильным: все контрпримеры доставлялись негладкими кривыми, а Ньютон считал орбиту гладкой кривой. Его доказательство основывалось, по существу, на топологических свойствах комплексной римановой поверхности кривой, строение которой Ньютон хорошо понимал. Тот факт, что кривая, для которой площади сегментов алгебраически зависят от секущей прямой, сама должна быть алгебраической, был ясен Ньютону из «теории рядов Пюизё», разработанной Ньютоном за сотни лет до Пюизё в его эспериментальной математике под именем «теории параллелограмма Ньютона» (сегодня скорее называемой «теорией многогранников Ньютона»).

Эта теория Ньютона является, по сути, вариантом теории преобразования Фурье, применённой Ньютоном к многочленам, записанной Ньютоном в слегка других, чем у Фурье, обозначениях.

Доказательство Ньютона основывалось на том, что гладкая вещественная алгебраическая кривая не гомологична нулю на своей римановой поверхности (отсутствовавшей в негладком случае треугольника Лейбница).

Жаль, что ни теорема Ньютона, ни его «метод параллелограмма» не входят в современные курсы анализа.

Сам Ньютон считал «теорию многогранников Ньютона» (представляющую степенными рядами решения всех уравнений, алгебраических, дифференциальных или интегральных) своим основным вкладом в математику. Именно этот метод составляет содержание второй диаграммы Ньютона, закодировавшей его основные открытия.

Желая помочь читателям, от которых современные методы преподавания математики скрыли основные достижения Ньютона, я покажу сейчас, как его теория исследует поведение решений уравнения

$$Ay^4 + Bxy^2 + Cx^4 + Dx^5y = 0$$

вблизи начала координат ($x = y = 0$).

Алгоритм Ньютона состоит из нескольких шагов.

1. Используем «плоскость Ньютона» с координатами (p, q) для представления одночленов $x^p y^q$ (рис. 4).

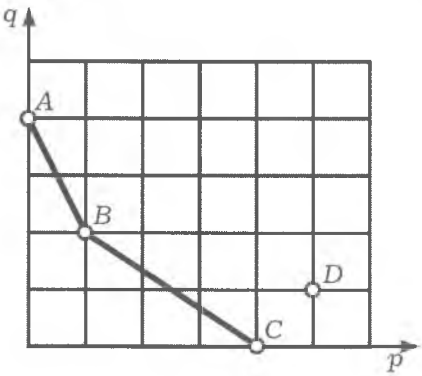


Рис. 4. Многоугольник Ньютона многочлена $Ay^4 + Bxy^2 + Cx^4 + Dx^5y$.

В обозначениях Фурье точка (p, q) плоскости Ньютона соответствует гармонической плоской волне $e^{2\pi i(px+qy)}$, с «волновым вектором» (p, q).

2. *Носитель многочлена*

$$f(x, y) = \sum \tilde{f}_{p,q} x^p y^q$$

есть то множество точек $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ плоскости Ньютона, для которых коэффициент $\tilde{f}_{p,q}$ отличен от нуля.

Как видно, «преобразование Фурье» $\tilde{f}$ функции f следовало бы называть «преобразованием Ньютона».

3. Рассмотрим *выпуклую оболочку* носителя многочлена (в плоскости $\mathbb{R}^2 \supset \mathbb{Z}^2$). В примере рисунка 4 это — четырёхугольник $ABCD$.

4. Выделим те грани границы выпуклой оболочки, которая видна из начала координат (AB и BC в примере рисунка 4) [обращённая к бесконечности часто граница полезна для исследования кривой $f(x, y) = 0$ не вблизи нуля, а на бесконечности].

5. Для каждой грани границы выпуклой оболочки, обращённой к началу координат, заменим многочлен f на сумму лишь тех его слагаемых одночленов, которые соответствуют целым точкам этой грани.

В примере рисунка 4 мы получим для граней AB и BC укороченные многочлены

$$Ay^4 + Bxy^2 \quad \text{и} \quad Bxy^2 + Cx^4.$$

6. Каждый из укороченных многочленов разделим на общий делитель его одночленов. В примере рис. 4 получим

$$AB \longmapsto Ay^2 + Bx, \quad BC \longmapsto By^2 + Cx^3.$$

7. Приравнивая получившиеся многочлены нулю, мы получим асимптотические аппроксимации для ветвей кривой $f(x, y) = 0$, проходящих через нуль.

В примере рис. 4 эти приближения имеют вид

$$Ay^2 + Bx = 0, \quad By^2 + Cx^3 = 0,$$

откуда получаются две ветви кривой, с асимптотиками

$$x = -(A/B)y^2, \quad y = kx^{3/2}, \quad k = \sqrt{-C/B}.$$

8. Чтобы получить дальнейшие члены асимптотического разложения, нужно подставить в исходное уравнение исправленные малыми добавками выражения (в примере рис. 4

$$x = -(A/B)y^2 + z, \quad y = kx^{3/2} + t.)$$

Тогда для нахождения поправок z и t из условия $f(x, y) = 0$ получатся новые полиномиальные уравнения, к которым нужно применить тот же алгоритм. Он доставит асимптотические выражения для поправок ($z(y)$ и $t(x)$ в нашем примере рис. 4).

При этом z окажется малой по сравнению с y^2 поправкой к исходному приближению (а t мало по сравнению с $x^{3/2}$) в окрестности начала координат, и метод Ньютона доставляет сходящиеся ряды для ветвей кривой $f(x, y) = 0$, проходящих через начало координат (рис. 5).

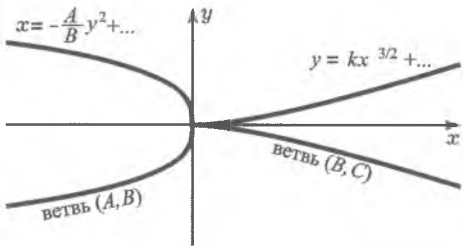


Рис. 5. Две ветви алгебраической кривой $f(x, y) = 0$, доставляемые двумя гранями многогранника Ньютона рис. 4.

Ньютон хорошо знал, сколь быстро сходятся его ряды, но не опубликовал таких очевидных для экспериментатора фактов. Он говорил, что ему стыдно сознаться, с каким числом десятичных знаков он составил для себя сам таблицу логарифмов, «имея в деревне много времени из-за чумы 1666 года в Лондоне».

Таблицы были сорокозначными. Метод вычисления этих таблиц — проявление замечательного экспериментального мастерства Ньютона. Он начал с теоретико-числовых наблюдений:

$$2^{10} = 1024 \text{ близко к } 1000, \quad \text{поэтому} \quad \lg_{10} 2 \approx 0,3$$

(на самом деле, это $0,30103\ldots$). Это наблюдение доставляет приближённые значения для $\lg_{10} 4$, $\lg_{10} 8$, $\lg_{10} 16$, $\ldots$, $\lg_{10} 128$. Тем самым, найдены и приближённые значения для $\lg_{10} 5$, $\lg_{10} 25$, $\lg_{10} 50$, $\lg_{10} 125$. Зная разложение натурального логарифма $\ln(1+x) \approx x - x^2/2 + \ldots$ для малых $|x|$, Ньютон вывел из найденных приближённых значений также приближённые значения для $\ln 10$ и $\lg_{10} e$. Это позволило перейти от 50 к 49 и найти $\ln 7$, тогда как переход от 10 к 9 доставил хорошее приближение к $\ln 3$. Используя произведения (например, $63 \approx 64$, 60, 72 и т. п.), Ньютон за пару часов вычислил значения $\ln$ и $\lg_{10}$ для довольно плотной сети целых чисел от 1 до 100.

Оставшиеся логарифмы быстро вычисляются как возмущения уже найденных с малыми $|x|$ (при помощи быстро сходящихся рядов Тейлора), так что вся таблица сорокозначных логарифмов вычисляется за считанные часы.

Современное математическое образование не учит такому мастерству. Штат Калифорния ввёл несколько лет назад правило, что для приёма в университеты штата школьники должны уметь делить число 111 на 3 без компьютера. Это требование предложил Г. Сиборг, химик и нобелевский лауреат, прославленный работами по трансурановым элементам.

Наличные студенты делить 111 на 3 не могли, и вашингтонские сенаторы сочли требование антиконституционной попыткой «учить в пределах нашей родины тому, чего мы сами не понимаем». Калифорнийские требования критиковали также как «расистскую попытку преградить чёрным путь в Университет».

Умение делить 111 на 3 безусловно входит в багаж экспериментальной математики, и я надеюсь сохранить его хотя бы в Европе.

Оставляя описанные выше древние ошибки Лейбница, обратимся к некоторым простейшим экспериментальным фактам элементарной математики: к дробям x/y (с целыми x и y). Некоторые дроби сократимы, как $4/6$, другие — нет, как $8/13$.

Какова вероятность несократимости случайно выбранной дроби?

Чтобы исследовать этот естественный и естественнонаучный вопрос экспериментально, рассмотрим круг $x^2 + y^2 \leq 25$ радиуса 5.

Целая точка внутри него будет считаться сократимой, если отрезок, соединяющий её с началом координат, не содержит других целых точек (рис. 6).

Число несократимых целых точек в круге составляет 48 (из общего числа 80 ненулевых целых точек в нём). Частота несократимости в нашем круге получается равной $48/80 = 3/5$, т. е. 60%.

Экспериментируя с бóльшими кругами, можно убедиться, что существует предельная «вероятность несократимости»

$$C = \lim_{R\to\infty} \left(\frac{\text{число взаимно простых пар } (x, y) = 1}{\text{число ненулевых целых точек в круге } x^2 + y^2 \leq R^2} \right) \approx$$
$$\approx 0,608\ldots .$$

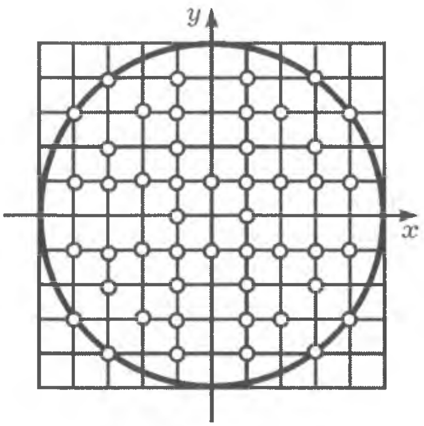


Рис. 6. Пары взаимно простых чисел $(x, y) = 1$ в замкнутом круге радиуса 5.

Вычисляя эту экспериментально обнаруженную постоянную, Эйлер нашёл её точное значение, $C = 6/\pi^2$.

Эта экспериментальная работа привела его к целому ряду замечательных математических открытий — к *теории дзета-функций*

$$\zeta(s) = \sum_n \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}, \tag{1}$$

к теории *рядов Фурье* (для негладких периодических функций) и к теории *градуированных алгебр и их рядов Пуанкаре.*

Суммирование в формуле (1) идёт по всем натуральным числам, $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$, а умножение — по всем простым числам, $p = 2, 3, 5, 7, 11, \ldots$.

Постоянная $C = 6/\pi^2$ есть $1/\zeta(2)$:

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots \approx 1{,}645\ldots,$$

сильно больше первого приближения 1,25.

Ряд (1) сходится при $\operatorname{Re} s > 1$, определяя там голоморфную в полуплоскости функцию. Эта функция продолжается на вторую полуплоскость мероморфно.

Чтобы объяснить тождество Эйлера (1) между суммой и произведением, начнём с (полуэмпирического) вероятностного рассуждения экспериментально-математического происхождения.

Это рассуждение можно строго обосновать и превратить в настоящее доказательство, но умение находить новые факты подобными нестрогими полуэмпирическими методами важнее последующих доказательств (которые могут появиться через сотни лет, как это произошло с экспериментальным открытием Лежандра, что среднее расстояние между соседними простыми числами в среднем ведёт себя для простых чисел вблизи большого числа n асимптотически как $\ln n$).

Доказательство этого факта (обнаруженного Лежандром экспериментально при $n \leq 10^6$) обычно приписывается Адамару и Валле-Пуссену. В действительности, однако, они доказали только *существование* асимптотики, обнаруженной экспериментально Лежандром. До них П. Л. Чебышев доказал, что эмпирическая асимптотика Лежандра «расстояние $\sim \ln n$» может быть пополнена доказанными неравенствами

$$a \ln n < \text{расстояние} < b \ln n,$$

и что, если асимптотика «расстояние $\sim c \ln n$» существует, что постоянная c должна быть равна 1 (хотя Лежандр получил эмпирическое приближение $c \approx 0,99997\ldots$).

Адамар и Валле-Пуссен ничего не добавили к этим замечательным открытиям Лежандра и Чебышева, кроме только строгого доказательства *существования* асимптотики, открытой до этого Лежандром и вычисленной до этого Чебышевым.

Вероятность делимости x на 2 есть $1/2$, делимости y на 2 — тоже $1/2$. Эти два события независимы, поэтому вероятность делимости целочисленного вектора (x, y) на 2 равна $1/4$.

Точно так же, вероятность делимости на простое число p равна $1/p^2$. Поэтому неделимость целочисленного вектора плоскости на p есть событие вероятности $1 - \frac{1}{p^2}$.

Неделимости на разные простые числа независимы. Поэтому одновременная неделимость ни на одно из простых чисел имеет вероятность

$$C = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2}\right).$$

Таким образом, мы естественным путём пришли к произведению, стоящему в формуле Эйлера (1), для $s = 2$. Аналогичные произведения для других целых значений s получаются при анализе делимости на p целочисленных векторов s-мерного пространства, принадлежащих $\mathbb{Z}^s$.

Приведение входящего в формулу (1) произведения к виду входящей в формулу (1) суммы доставляется Эйлеровой теорией градуированных коммутативных алгебр (которая вычисляет число одночленов степени m от s переменных).

Обозначим это число через q_m и построим производящую функцию $q(t) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} q_m t^m$ (она называется *рядом Пуанкаре* градуированной алгебры многочленов от s переменных).

Для $s = 1$ мы получаем, очевидно, $q_m = 1$ при любом $m \geq 0$. Поэтому ряд Пуанкаре градуированной алгебры многочленов от одной переменной равен

$$q(t) = 1 + t + t^2 + \ldots = \frac{1}{1-t}.$$

Рассмотрим многочлены от двух переменных. Перемножая соответствующие ряды

$$q(t) = 1 + t + t^2 + \ldots, \quad q(\tilde{t}) = 1 + \tilde{t} + \tilde{t}^2 + \ldots,$$

мы замечаем, что произведение

$$q(t)q(\tilde{t}) = (1 + t + t^2 + \ldots)(1 + \tilde{t} + \tilde{t}^2 + \ldots) = \\ = 1 + (t + \tilde{t}) + (t^2 + t\tilde{t} + \tilde{t}^2) + \ldots$$

содержит ровно один раз каждый многочлен от двух переменных t и $\tilde{t}$.

Стало быть, производящая функция, считающая одночлены от двух переменных, есть

$$q(t)q(t) = 1 + 2t + 3t^2 + \cdots = \frac{1}{(1-t)^2}.$$

Такое же рассуждение доставляет ряд Пуанкаре

$$Q(t) = \frac{1}{(1-t)^m}$$

для многочленов от m переменных.

Применя эти разложения к произведению

$$\frac{1}{C}=\prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}=\prod_p\left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\ldots\right),$$

мы получим ряд, элементами которого являются конечные произведения степеней различных простых чисел,

$$\frac{1}{2^{m_2 s}}\cdot\frac{1}{3^{m_3 s}}\cdot\frac{1}{5^{m_5 s}}\cdot\ldots=\frac{1}{n^s},$$

где $n=2^{m_2}\cdot 3^{m_3}\cdot 5^{m_5}\cdot\ldots$.

Эти произведения n доставляют по разу в точности все натуральные числа (это — теорема единственности разложения на простые множители).

Так Эйлер доказал свою формулу (1) для дзета-функции Римана (изобретённой Эйлером именно в его эксперименталистском исследовании вероятности сократимости дробей).

Вычисление суммы ряда $\sum\limits_n \frac{1}{n^2}=\pi^2/6$ является лёгким упражнением по вычислению коэффициентов Фурье (негладких) 2π-периодических функций Колмогорова

$$f_0(t)=\operatorname{sign}\sin t,\qquad f_r(t)=\int^t f_{r-1}(t)dt.$$

Постоянная интегрирования в интеграле для f_r выбирается так, чтобы интеграл от f_r по всему периоду был нулём, дабы функция f_{r+1} была периодической.

Полученная формула Эйлера:

вероятность сократимости дроби есть $C=6/\pi^2$

может быть также истолкована как вычисление чезаровского среднего функции Эйлера φ, определённой так:

$\varphi(n)=$ *число взаимно простых с* n *остатков от деления на* n.

Легко видеть, что для простого p имеют место равенства $\varphi(p)=p-1$, $\varphi(p^q)=(p-1)p^{q-1}$, а для взаимно простых

n_1 и n_2 функция Эйлера ведёт себя мультипликативно: $\varphi(n_1 n_2) = \varphi(n_1)\varphi(n_2)$.

Значения функции Эйлера $\varphi(n)$ ведут себя при росте числа n нерегулярно:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\varphi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	12	6	8	8	16	6	18	8

Однако, их чезаровское асимптотическое среднее ведёт себя как Cn, где

$$C = 1/\zeta(2) = 6/\pi^2 \approx 0,608\ldots .$$

Этот вывод следует из предыдущего полуэмпирического вывода вероятности несократимости дроби (который допускает вполне строгое обоснование).

Асимптотический чезаровский коэффициент C определяется здесь как

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^2}\sum_{m\le n}\varphi(m)\right),$$

причём для $n = 20$ получается $\dfrac{2}{n^2}\sum = \dfrac{258}{400} = 0,645$.

Замечание. Чезаровская асимптотика числа $\tau(n)$ целых делителей большого целого числа n есть

$$\widehat{\tau}(n) \sim \ln n,$$

а чезаровская асимптотика суммы σ_s s-х степеней делителей есть

$$\widehat{\sigma}(n) \sim c_s n^s, \quad \text{где } c_s = \zeta(s+1).$$

Здесь *чезаровская асимптотика* $\widehat{u}(n)$ величины $u(n)$ определяется условием

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{m=1}^{n} u(n)}{\sum\limits_{m=1}^{n}\widehat{u}(n)} = 1. \qquad (*)$$

Это чезаровское среднее не нужно путать с противоественным определением, принимаемым многими математиками, для которых постоянная C в их средней «асимптотике», обозначаемой знаком «$\sim$», $u(n)$«$\sim$»Cn^a, определяется формулой

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{m=1}^{n} u(m)\right)/n^{a+1}.$$

Дело в том, что в их (противоестественном) смысле чезаровское среднее от cn^a равно («$\sim$») $\dfrac{c}{a+1}n^a$, так что их коэффициент $C = c/(a+1)$ в $a+1$ раз меньше естественного коэффициента c.

В противоестественном определении «среднее» от n есть $n/2$. В моём определении (*) выше среднее от n есть n.

Это техническое замечание становится важным в *экспериментальной работе*, если $a \neq 0$, так как без него трудно сравнивать (противоестественные) средние с наблюдениями.

Пример. Для суммы делителей $\sigma(n) = 1 + \ldots + n$ наблюдённое значение

$$\sum_{m=1}^{20} \sigma(m) = 309$$

хорошо соответствует моему чезаровскому среднему (*):

$$\widehat{\sigma}(n) \approx c_1 n^1 \quad (c_1 = \pi^2/6).$$

Противоестественное определение даёт противоестественное «чезаровское среднее» Cn, где $C \approx 309/400 \approx 0,77$, что примерно вдвое меньше наблюдённого c_1.

Зная поведение суммы делителей $\sigma_1(n)$ и числа делителей $\tau(n)$, можно исследовать и поведение среднего делителя, $d(n) = \sigma_1(n)/\tau(n)$.

Эксперименты показали, что чезаровское среднее $\widehat{d}$ среднего делителя сильно превосходит отношение чезаровских средних числителя и знаменателя:

$$\widehat{d}(n) \sim \frac{cn}{\sqrt{\ln n}} \gg \frac{cn}{\ln n}.$$

К сожалению, специалисты по теории чисел, кажется, пренебрегли всеми этими естественными естественнонаучными вопросами (предпочитая им проблемы дедуктивно-аксиоматического происхождения, вроде гипотезы Римана, что $\operatorname{Re} s = 1/2$ во всех нетривиальных нулях s функции ζ).

Пуанкаре утверждал, что математические проблемы делятся на два типа: *бинарные проблемы* (вроде проблемы Ферма или гипотезы Римана), где ожидается бинарный ответ («да» или «нет») и *интересные проблемы*, где возможно непрерывное продвижение вперёд, основанное на новых экспериментальных данных, и где можно исследовать влияние деформирования условий задачи (вроде граничных условий для дифференциального уравнения) на природу решения (как в задачах о бифуркациях).

К счастью, бинарные проблемы (будь то проблемы из списка Гильберта или из других списков) оказали столь же мало влияния на развитие науки, как и Нобелевские премии или Фильдсовские медали. Ни Г. Вейль, ни М. Морс, ни Лере, ни Колмогоров, ни Черн, ни Понтрягин, ни Тьюринг, ни Шэннон, ни Петровский, ни Гёдель, не были отмечены Комитетом по медалям Фильдса, но их работы составляют главнейшие достижения математики XX-го столетия.

Пуанкаре сформулировал в качестве основной задачи, унаследованной двадцатым веком от предыдущего, *проблему создания математических методов квантовой и релятивистской физики* (его доклад Всемирному Математическому Конгрессу об этом был опубликован за 3 года до проблем Гильберта, а его принцип относительности — за 10 лет до Эйнштейна).

Скажу здесь несколько слов об упомянутой Пуанкаре *теории бифуркаций*, объясняющей *потерю устойчивости положений равновесия (типичных) динамических систем.*

Стандартное исследование устойчивости начинается с вычисления собственных чисел линеаризованного в положении равновесия векторного поля, определяющего динамику малых отклонений от положения равновесия. Для устойчивости эти собственные числа должны принадлежать левой полуплоскости, $\operatorname{Re} \lambda < 0$.

Деформация системы, происходящая при изменении значений некоторых её параметров (как на Чернобыльской станции) может сдвинуть собственные числа из левой полуплоскости в правую. В момент, когда собственное число (вместе с сопряжённым ему собственным числом) переходит в правую полуплоскость, положение равновесия теряет устойчивость.

При этом (в типичных системах) произойдёт одно из следующих двух событий (они называются *мягкой* потерей устойчивости и *жёсткой* потерей устойчивости).

В момент мягкой потери устойчивости потерянная устойчивость положения равновесия переходит вновь родившемуся из него предельному циклу-аттрактору, который растёт, как квадратный корень из времени, прошедшего после потери устойчивости (рис. 7).

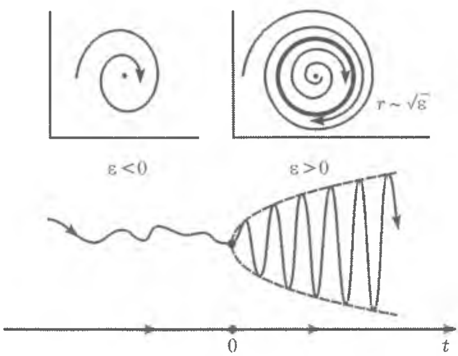


Рис. 7. Рождение предельного цикла и поведение фазовой координаты вблизи момента мягкой потери устойчивости равновесия.

Родившийся предельный цикл вначале мал, и, несмотря на его уже потерянную устойчивость, наблюдатель вначале может думать, что равновесие ещё устойчиво, так как возникшие осцилляции вблизи этого положения равновесия имеют малую (с ε) амплитуду.

При жёсткой потере устойчивости наблюдается совершенно иной сценарий: в момент потери устойчивости в положении равновесия умирает неустойчивый предельный цикл (рис. 8). В этом случае исчезает область притяжения положения равновесия, ограниченная этим циклом (в случае двумерного фазового пространства: в многомерном случае она ограничена цилиндрической гиперповерхностью, направляющей которой является этот цикл).

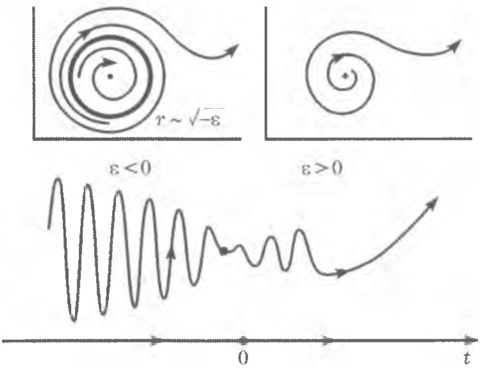


Рис. 8. Умирание области притяжения положения равновесия при жёсткой потере устойчивости и результирующий катастрофический уход системы в другую часть фазового пространства.

В момент жёсткой потери устойчивости дальнейшее движение системы в малой окрестности утратившего устойчивость равновесия долго продолжаться не может: наблюдатель внезапно заметит катастрофический уход системы в другую область фазового пространства, хотя перед моментом потери устойчивости наблюдались такие же затухающие колебания вблизи положения равновесия, как и при мягкой потере устойчивости.

Отсюда видно, что различение мягкой и жёсткой потери устойчивости жизненно важно для практической безопасности работы системы.

Какой из этих двух сценариев реализуется, зависит от знака некоторой комбинации коэффициентов Тейлора невысокого порядка в разложении векторного поля, задающего динамику системы, в положении равновесия.

Описанная выше теория была опубликована в конце двадцатых годов XX столетия русским радиофизиком А. А. Андроновым, разработавшим её ради исследования мощных радиопередающих устройств (где как раз используется вновь родившийся устойчивый предельный цикл рисунка 7). Математические доказательства его утверждений не просты, и они были опубликованы лишь несколько лет спустя, так что его теория, относящаяся вначале к экспериментальной, полуэмпирической математике, стала строго обоснованной математической теоремой в конце тридцатых годов.

Сегодня эту теорию называют (даже, как это ни странно, в России) «теорией бифуркации Хопфа», по имени американского математика Э. Хопфа, опубликовавшего в США через 15 лет после Андронова часть его результатов.

Теория Андронова, однако, основывалась на предшествовавших ей и использованных им результатах Пуанкаре, создавшего общую теорию бифуркаций ради небесно-механических приложений к теории бифуркаций периодических орбит в задаче трёх тел.

Но Пуанкаре сформулировал (особенно в своей диссертации, а позже и в своей книге «Новые методы небесной механики») и общую теорию.

Интересно, что эта прикладная работа Пуанкаре в области экспериментальной математики уже содержала важный общетеоретический результат, который называется сегодня «теорией версальных деформаций» (в диссертации Пуанкаре эта теория составляла лемму 4).

Знаменитая теорема о версальных деформациях сводит исследование произвольных деформаций заданной системы к исследованию одной специальной (многопараметрической) деформации, называемой «версальной деформацией», которая, в некотором смысле, «содержит» все остальные деформации.

В современных терминах можно сказать, что Пуанкаре доказал эту теорему для точек полного пересечения голоморфных гиперповерхностей. Это требование аналитичности правых частей дифференциальных уравнений (позволяющее использовать комплексную геометрию в доказательствах) выполнялось в небесной механике, но сильно ограничивает приложения к неаналитическим системам общего положения.

Соответствующая теорема для топологических бифуркаций динамических систем, не предполагающая даже дифференцируемости нужных функций по параметрам, была опубликована Р. Томом (как «приложение топологии в биологии») для четырёхпараметрических систем.

Однако, его (неопубликованное) доказательство было неверным, и сегодня неизвестно, существует ли в его ситуации четырёх параметров версальная деформация (известно только, что предложенная им деформация не версальна).

Том пропустил ряд случаев, думая, что в динамических системах общего положения с четырьмя параметрами встречаются лишь семь специальных бифуркаций, рассмотренных в его «теории катастроф» (эти 7 катастроф Тома, вероятно, первым рассмотрел сотней лет раньше А. Кэли, но он не утверждал, что этими примерами всё исчерпывается).

Сегодня известно, что разных бифуркаций положений равновесия градиентных динамических систем Тома (с четырьмя параметрами) не меньше тринадцати, однако не доказано ни отсутствие ещё других бифуркаций, ни хотя бы конечность числа топологически разных бифуркаций в четырёхпараметрических системах общего положения.

Для случая одного и двух параметров классификация Тома правильная, но при бо́льшем числе параметров возникают пропущенные им новые явления (называемые сегодня «бифуркациями инстантонов»).

В отличие от топологического (C^0) случая непрерывных бифуркаций, случай неаналитической гладкой (C^∞, а иногда и C^r) классификации деформаций решён в современной математике аналогичной теории Пуанкаре теоремой о версальных деформациях, открытой Р. Томом и доказанной Б. Мальгранжем.

Мальгранж несколько лет сопротивлялся Тому, который старался убедить его, что гладкая теорема о версальных деформациях должна быть верной и что гладкие функции ведут себя в этом случае подобно аналитическим.

В отличие от Пуанкаре, ограничивавшегося аналитическим случаем, Андронову были нужны и гладкие системы. Теоремы Мальгранжа тогда ещё не было, но нужное Андронову перенесение результатов Пуанкаре на неаналитические системы построил уже в тридцатые годы Л. С. Понтрягин. Так в этом случае вопрос экспериментальной математики привёл чистых математиков (как Пуанкаре и Понтрягин) к красивым «дедуктивным» теориям.

Не входя в детали этих теорий, я упомяну, однако, один случай, где эти теории ещё недостаточны для решения важного вопроса (связанного с 16-й проблемой Гильберта о предельных циклах).

Рассмотрим «интегрируемую систему» дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x,y),$$

все фазовые кривые которой на плоскости с координатами (x, y) замкнуты. Обозначим через H соответствующий первый интеграл (замкнутые компоненты связности линий уровня кривой $H(x,y) = 0$ являются орбитами движения в исходной интегрируемой системе:

$$\frac{d}{dt} H(x(t), y(t)) = 0).$$

Типичный пример доставляют системы типа уравнений «борьбы за существование» Лотка–Вольтерра

$$P = x(a + bx + cy), \quad Q = y(d + ex + fy).$$

При некоторых наборах коэффициентов $(a, \ldots, f)$ эта система интегрируема (рис. 9) и имеет первый интеграл H (рис. 10). Например, это так в случае $b = f = 0$.

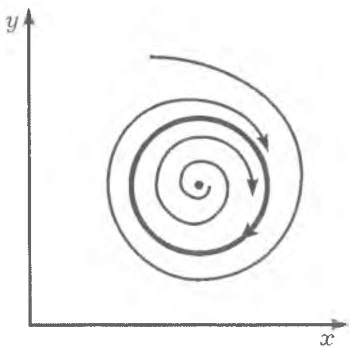


Рис. 9. Фазовые кривые неинтегрируемой системы типа Лотка–Вольтерра.

Первый интеграл общей интегрируемой системы типа Лотка–Вольтерра приводится (линейной заменой координат на фазовой плоскости) к (вообще говоря, трансцендентной) «нормальной форме»

$$H(x,y) = x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}, \quad \text{где } z = 1 - x - y.$$

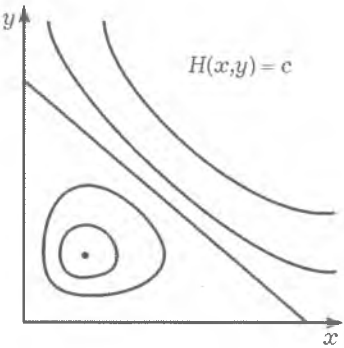


Рис. 10. Линии уровня нормализованного первого интеграла H интегрируемой системы типа Лотка–Вольтерра.

Теория Пуанкаре и Понтрягина описывает рождение предельных циклов из замкнутых фазовых кривых $H = c$ интегрируемой системы при её малых возмущениях, заменяющих векторное поле с компонентами (P, Q) на поле с компонентами $(P+\varepsilon p, Q+\varepsilon q)$, где p и q — некоторые «возмущающие функции» от x и y.

Пуакаре предложил проинтегрировать скорость возрастания интеграла H в возмущённом движении вдоль фазовых кривых невозмущённого движения,

$$\Delta = \int_0^T \left(\frac{\partial H}{\partial x}(P+\varepsilon p) + \frac{\partial H}{\partial y}(Q+\varepsilon q)\right) dt =$$

$$= \varepsilon \oint_{H=c} \left(p\frac{\partial H}{\partial x} + q\frac{\partial H}{\partial y}\right) dt = \varepsilon \oint_{H=c} \left(p\frac{\partial H}{\partial x}\right) /P dx + \left(q\frac{\partial H}{\partial y}\right) /Q dy.$$

Обозначая через $I(c)$ последний интеграл вдоль компоненты связности замкнутой линии уровня кривой $H(x, y) = c$, Пуанкаре и Понтрягин доказали рождение предельных циклов из тех линий уровня $H(x, y) = c$, для которых интеграл $I(c)$ обращается в нуль, так что число рождающихся предельных циклов равно числу нулей функции I (в частности, если все эти нули простые, но и в некоторых более общих случаях).

Вопрос 16-й проблемы Гильберта о предельных циклах состоит в том, каково наибольшее возможное число предельных циклов для квадратичного векторного поля на плоскости (то есть, когда P и Q — многочлены второй степени).

До сих пор неизвестно, ограничено ли это число циклов единой постоянной для всех квадратичных полей. Доказана лишь конечность числа предельных циклов для каждого индивидуального квадратичного поля, но это конечное число может сильно зависеть от коэффициентов многочленов P и Q, так что не ясно, ограничено ли оно равномерно (единой для всех значений коэффициентов постоянной).

Вследствие этого, используя теорию бифуркаций Пуанкаре–Понтрягина в ситуации проблемы Гильберта, хотелось бы найти число изолированных нулей c специального интеграла I, определённого выше для систем типа Лотка–Вольтерра: хотелось бы узнать, ограничено ли это число нулей равномерно (не зависящей от коэффициентов квадратичных многочленов P, p, Q и q постоянной).

Этот вопрос относится, в сущности, к алгебраической геометрии. Но алгебраические геометры не справляются с действительными ($\mathbb{R}$) трудностями, будучи скорее заинтересованными комплексными или p-адическими проблемами.

С другой стороны, вопросы о числе циклов или о числе нулей интеграла I можно считать проблемами вычислительной математики (так как компьютерные эксперименты могли бы, в принципе, доставить новые примеры, где циклов больше, чем удалось найти теоретикам).

К несчастью, вклад компьютеров в эти действительные ($\mathbb{R}$) и трудные проблемы экспериментальной математики пока что ещё мал. Я могу указать только один недавний пример — задачу подсчёта параболических кривых на поверхностях трёхмерного евклидова пространства, которые являются графиками многочленов $z = f(x, y)$ степени 4.

Параболическая кривая графика определяется условием вырожденности второго дифференциала функции, $H(x, y) = 0$, где

$$H = \det \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}.$$

Гессиан H многочлена f четвёртой степени сам является многочленом степени 4. Число замкнутых кривых уровня многочлена степени 4 не превосходит $g+1=4$ по общей теореме Харнака вещественной алгебраической геометрии. Теорема Харнака эквивалентна случаю $n=1$ следующего неравенства Смита для чисел Бетти с коэффициентами $\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$: если $M_{\mathbb{C}}$ — комплексное алгебраическое проективное многообразие размерности n и $M_{\mathbb{R}}$ — многообразие его вещественных точек, то неравенство Смита имеет вид

$$\sum_{i=0}^{n} b_i(M_{\mathbb{R}}) \leq \sum_{j=0}^{2n} b_j(M_{\mathbb{C}}).$$

При $n = 1$ каждая замкнутая вещественная кривая $M_{\mathbb{R}}$ даёт в левую часть вклад $b_0(S^1) + b_1(S^1) = 2$, а риманова поверхность $M_{\mathbb{C}}$ рода g даёт в правую часть вклад $b_0(M_{\mathbb{C}} + b_1(M_{\mathbb{C}}) + b_2(M_{\mathbb{C}})) = 1 + 2g + 1$, поэтому неравенство Смита принимает вид:

число замкнутых компонент вещественной кривой $M_{\mathbb{R}} \leq g+1$.

Род гладкой плоской проективной кривой степени $n = 4$ равен $g = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2} = 3$ (по формуле Римана–Гурвица), так что число замкнутых ветвей параболической кривой $H=0$ графика многочлена f степени 4 не может превзойти $g+1=4$.

Построить примеры многочленов f степени 4 с тремя замкнутыми параболическими кривыми $M_{\mathbb{R}}$ на графике нетрудно. Но вопрос о том, достигается ли случай $b_1(M_{\mathbb{R}}) = 4$, оставался открытым много лет. Для многочленов f степени n верхняя и нижняя грани для числа замкнутых параболических кривых $H = 0$ на графике многочлена f растут с n как n^2, но коэффициенты при n^2 в оценке Харнака (сверху) и в примерах (доставляющих оценку снизу) пока ещё сильно различаются.

Сходная ситуация имеет место и для числа замкнутых параболических кривых на гладкой алгебраической поверхности степени n в $\mathbb{R}P^3$: здесь и оценка сверху, и число кривых в построенных примерах, растут как n^3, но коэффициент при n^3

в оценке сверху примерно в 10 раз больше, чем в наилучших примерах.

В 2005 году были впервые построены действительные многочлены степени 4 от двух переменных, на графиках каждого из которых имеются 4 замкнутые параболические кривые.

Эти примеры построила в Мексике выпускница университета Париж-6 Адриана Ортиц Родригес, недавно защитившая в Париже диссертацию о параболических кривых.

Она использовала непрерывно работавший в течение года компьютер, исследовавший за это время пятьдесят миллионов многочленов четвёртой степени f. У трёх из этих многочленов оказалось по четыре замкнутых параболических кривых.

По-видимому, пока ещё не известно, из скольких компонент связности состоит множество действительных многочленов f степени 4 от двух переменных, для которых на графике лежат четыре замкнутые параболические кривые $M_{\mathbb{R}} : H(x, y) = 0$, так что $b_1(M_{\mathbb{R}}) = 4$.

Неизвестно также, различаются ли топологически соответствующие гессианы (многочлены $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$).

Аналогичные вопросы о компонентах пространства многочленов открыты и для общих многочленов степени четыре $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (не являющихся гессианами). Такая функция в $\mathbb{R}^2$ имеет, вообще говоря, не более девяти критических точек. Число топологически различных деревьев для функций Морса с десятью критическими точками на сфере S^2 равно 17746.

Дерево функции — это пространство, точками которого являются связные компоненты множеств уровня этой функции. Например, деревом горы Эльбрус, имеющей две вершины, разделённые седлом, является буква У. Мы будем предполагать все критические точки невырожденными (морсовскими) и все критические значения различными.

Гора Везувий тоже доставляет три критические точки: максимум, минимум (в кратере) и седло (в низшей точке края кратера). Соответствующее дерево тоже гомеоморфно букве У, как для Эльбруса, но мы будем считать эти два дерева топологически разными, требуя для топологической одинаковости, чтобы порядок критических значений (на оси значений функции) в соответствующих друг другу критических точках двух функций (то есть в концевых точках и в точках ветвления их деревьев) были одинаковы.

Из 17746 деревьев с четырьмя точками ветвления (соответствующих различным упорядочениям десяти вершин дерева) многочленами степени 4 реализуются лишь немногие. Вопрос о том, какие именно деревья (с упорядоченными вершинами) реализуются многочленами степени n был бы интересным добавлением к 16-й проблеме Гильберта о топологии вещественных алгебраических кривых.

Эта проблема Гильберта была решена древними для кривых степеней 1 и 2, а для кривых степеней 3 и 4 — Ньютоном и Декартом. Гильберт объявил, что он доказал некоторую теорему о топологической структуре расположения одиннадцати овалов кривой степени 6, а именно, что возможны только два топологически различных расположения овалов на вещественной проективной плоскости.

Однако, эти теоремы Гильберта были неверными, так же как и их (неопубликованные им) доказательства.

Проблема экспериментальной математики — как может выглядеть плоская вещественная алгебраическая кривая данной степени n — является одним из самых фундаментальных вызовов, бросаемых математике естественными науками (где эти кривые описывают самые разнообразные явления природы).

Ответ на этот естественно-научный вопрос неизвестен и сегодня уже для кривых степени 8 (а именно, неизвестно, как могут располагаться их 22 овала).

Экспериментальные исследования этого направления были начаты российским математиком Д. А. Гудковым, учеником А. А. Андронова, который исправил неверный ответ Гильберта, описывающий расположение 11 овалов кривых степени 6.

Число топологически различных расположений этих одиннадцати овалов равно не двум, как утверждал Гильберт, а трём. А именно, ровно один овал содержит другие овалы в ограниченной им диффеоморфной кругу области, причём число этих внутренних овалов может быть 1, 5 или 9 (рис. 11).

Рецензируя диссертацию Гудкова (которая опровергала не только теорему Гильберта, но и доказательство этой теоремы,

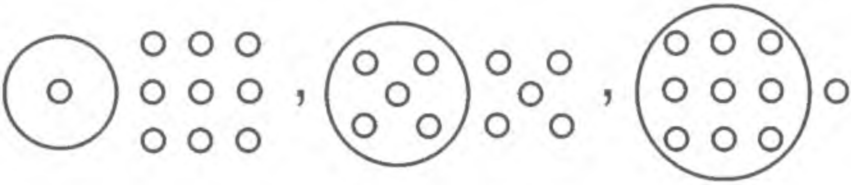


Рис. 11. Алгебраические кривые степени 6, состоящие из 11 овалов.

опубликованное в предыдущей работе Гудкова), я связал его результаты с топологией четырёхмерных гладких многообразий (где известные теоремы о делимости топологических инвариантов на 8 объясняют шаг 4 последовательности 1, 5, 9 ответов Гудкова).

Сегодня вещественная алгебраическая геометрия, возникшая из работ о вопросе 16-й проблемы Гильберта о топологии вещественных проективных кривых, достигла огромных успехов, связавших эту область исследований с топологией многомерных многообразий, с инвариантами квантовой теории поля и даже с арифметикой (целочисленных квадратичных форм).

Однако, основные экспериментально-математические проблемы, включая естественные естественно-научные вопросы о вещественных многочленах (или тригонометрических многочленах), или о возможных числах Бетти алгебраических поверхностей фиксированной степени, остаются открытыми.

Интересно отметить, что эти вопросы вещественной алгебраической геометрии связаны с топологическими свойствами собственных функций и полей задач математической физики.

Алгебраический случай включается в эту теорию, где он соответствует колебаниям стандартной сферы, описываемым собственными функциями оператора Лапласа на ней (ведь эти собственные функции являются многочленами, а именно ограничениями на сферу гармонических в объемлющем пространстве многочленов).

Первая попытка распространить топологические свойства алгебраических объектов на трансцендентный случай принадлежит Куранту, теорема которого оценивает число областей, на которые гиперповерхность нулей собственной функции делит колеблющееся многообразие: это число компонент связности дополнения к гиперповерхности нулей не превосходит номера собственной функции (в естественном упорядочении по убыванию собственных чисел).

В книге «Методы математической физики» Куранта и Гильберта такая же оценка числа компонент числом n указана и для линейной комбинации первых n собственных функций. Но эта теорема неверна, если размерность колеблющегося многообразия больше единицы.

Задача трансцендентного обобщения теоремы Безу и теории Штурма, оценивающего числа Бетти множеств уровня собственных функций и зависимость топологии собственных функций или собственных полей от положения соответствующего собственного числа в спектре оператора — всеми этими естественнонаучными задачами теоретики-математики пренебрегли (причём это относится и к алгебраическим геометрам, и к специалистам по уравнениям с частными производными, к дифференциальным топологам и к специалистам по теории узлов, к исследователям спиральности магнитного поля и к обобщениям инварианта Хопфа).

Я не сомневаюсь, что новое понимание всей этой интереснейшей области придёт скорее со стороны экспериментальной математики, чем со стороны аксиоматических дедукций (новое понимание может ведь произойти и от контрпримеров к существующим гипотезам, и от новых нестрогих доводов, поддерживающих их).

Следующий пример приложения экспериментов к теоретическим исследованиям принадлежит А. Н. Колмогорову.

Чтобы оценить число предельных циклов квадратичных векторных полей на плоскости, он раздал несколько сотен таких полей (со случайно выбранными коэффициентами многочленов второй степени) нескольким сотням студентов механико-математического факультета МГУ в качестве математического практикума.

Каждый студент должен был найти число предельных циклов своего поля.

Результат этого эксперимента был совершенно неожиданным: ни у одного поля не оказалось ни одного предельного цикла!

При малом изменении коэффициентов поля предельный цикл сохраняется. Поэтому системы с одним, двумя, тремя (и даже, как стало известно позже, четырьмя) предельными циклами образуют в пространстве коэффициентов открытые множества, так что вероятности попасть в них при случайном выборе коэффициентов многочленов положительны.

Тот факт, что этого не случилось, подсказывает, что упомянутые вероятности, по-видимому, малы. Однако, до сих пор нет никакой теории, описывающей разницу между «обычными случаями» и «исключительными случаями» (когда те и другие представлены открытыми областями положительной вероятности в пространстве всех случаев).

Я предполагаю, что придать точный математический смысл описанным выше экспериментальным фактам было бы полезным и для теоретической математики, и для приложений.

Пытаясь двигаться в эту сторону, я изучал частоты разных неприводимых представлений группы симметрий осциллирующего многообразия в соответствующих пространствах собственных функций, соответствующих различным собственным числам. Экспериментальные результаты исследования первых нескольких миллионов собственных векторов магнитогидродинамической задачи были связаны с «проблемой быстрого кинематического динамо» астрофизиков (сформулированной А. Д. Сахаровым и Я. Б. Зельдовичем).

Эксперимент (где группа симметрий была конечной) показал, что кратности неприводимых представлений оказываются приблизительно пропорциональными их размерностям (как это происходит и с регулярным представлением группы в пространстве функций на ней).

Недавно я строго доказал, что эта асимптотическая пропорциональность кратностей размерностям является асимптотическим свойством всех наиболее частых унитарных представлений группы в комплексном пространстве $\mathbb{C}^N$ большой фиксированной размерности $N \to \infty$.

Представление T называется *частым*, если размерность многообразия $M(T)$ унитарно эквивалентных представлению T представлений группы в том же пространстве $\mathbb{C}^N$ имеет максимальное значение $\dim M$ (по сравнению с другими представлениями в том же пространстве).

Таким образом, эксперимент показывает, что природа выбирает для осциллирующего многообразия именно наиболее вероятное представление группы симметрий (в пространстве первых N собственных векторов).

Однако, этот результат (выбор природой наиболее частого представления) остаётся эмпирическим наблюдением, а не доказанной теоремой: я не доказал строго необходимость наиболее частого представления в пространстве собственных векторов, а лишь подтвердил его всего несколькими миллионами примеров.

Для доказательства было бы достаточно достичь некоторой регулярности границ фундаментальных областей действия группы симметрий на осциллирующем многообразии (например, годятся полиэдральные границы). Но я не умею доказывать существование таких фундаментальных областей ни для произвольных групп симметрий, ни хотя бы для изометрических действий общего положения конечных групп на компактных римановых многообразиях (что уже доставило бы обоснование частоты представления собственными векторами во многих ситуациях).

Теория бифуркаций периодических орбит привела Пуанкаре к статистике непрерывных дробей. Дело в том, что соизмеримости периодов вращения планет вокруг Солнца ответственны за большие «вековые» возмущения, и распространённость таких возмущений зависит от точности рациональных приближений отношений периодов $\lambda = T_1/T_2$ дробями $\lambda \approx p/q$, где целые числа p и q не слишком велики.

Отличие приближающей дроби от величины λ описывается в теории диофантовых приближений разложением в цепную дробь

$$\lambda = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots}}.$$

Оборвав дробь перед большим элементом a_k, мы получим очень хорошее приближение к числу λ, и возможность столь хороших приближений зависит от наличия в разложении числа λ в цепную дробь больших неполных частных a_k.

«Золотое сечение» $\lambda = (\sqrt{5}+1)/2 \approx 1,61\ldots$ приближается хуже всего (все неполные частные a_k равны в этом примере единице). Последовательные оборванные непрерывные дроби доставляют в этом случае приближения $1, 2, 3/2, 5/3, 8/5, 13/8, \ldots$ (числители и знаменатели составляют последовательность Фибоначчи, $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$).

Чтобы изучить наличие больших вековых возмущений планетных движений в небесной механике, нужно знать статистику встречаемости различных неполных частных a_k в разложении в цепную дробь соответствующих вещественных чисел λ, которые в астрономии зависят от начальных условий. Астрономы составили таблицы наблюдённых значений этих чисел.

Но подобную задачу можно сформулировать и в теории вероятностей: каково распределение различных целых чисел среди неполных частных $a_0, a_1, \ldots$ разложения в цепную дробь случайно выбранного вещественного числа λ?

Гаусс по меньшей мере угадал ответ на этот вероятностный вопрос: частота p_j значений $a_k = j$ убывает с ростом значения неполного частного j квадратично, а именно

$$p_j = c \ln\left(1 + \frac{1}{j(j+2)}\right).$$

Коэффициент c определяется из нормализующего частоты условия $\sum p_j = 1$, что приводит к $c = 1/\ln 2$. Частота неполного частного $j = 1$ очень велика, почти 50%, но большие значения j неполного частного встречаются с малой частотой p_j, если число λ выбрано случайно.

Я расскажу теперь несколько деталей длинной истории этого экспериментального результата, начиная с вопроса Пуанкаре, связанного с его приложениями к небесной механике.

Гаусс, вероятно, был первым, кто заметил инвариантность меры с плотностью $dx/(1+x)$ на интервале $(0 < x < 1)$ по отношению к преобразованию, переводящему число x в дробную долю числа $1/x$.

Приведённые выше «вероятности» p_j появляются как интегралы этой плотности вдоль интервалов, где целая часть числа $1/x$ принимает соответствующее значение j.

В 1928 году Р. Кузьмин доказал, что постоянные p_j действительно являются асимптотическими частотами целых чисел j среди неполных частных случайного вещественного числа λ: эта асимптотика нарушается только для исключительного множества необычных чисел λ, имеющего на вещественной оси лебегову меру нуль (это исключительное множество содержит все рациональные числа, золотое сечение и все квадратичные иррациональности).

Я не знаю, мог ли Гаусс доказать или хотя бы сформулировать эту теорему Кузьмина: ведь для этой формулировки нужна лебегова мера.

Для Пуанкаре существование асимптотики Кузьмина не было бы неожиданным, он уже сформулировал соответствующие формы эргодической теоремы, пытаясь помочь Больцману в его эргодическом подходе к статистической механике. Всюду плотные исключительные множества меры нуль необходимы во всех таких результатах эргодической теории.

Доказательство теоремы Кузьмина лучше всего изложено в книжке Хинчина «Цепные дроби». Оно сводится к проверке эргодичности динамической системы Гаусса

$$x \mapsto 1/x - [1/x].$$

Трудность состоит, однако, в том, что в 1928 году, когда появилась теорема Кузьмина, эргодической теоремы Биркгофа, на которой основано доказательство Хинчина, ещё не было. Можно предполагать, что Кузьмин, в сущности, доказал теорему Биркгофа (по меньшей мере — для нужной ему специальной системы), и было бы интересно понять, осознал ли он справедливость общей теоремы, доказывая свой замечательный результат.

Эксперименталистская часть истории теоремы Кузьмина о распределении неполных частных содержит ещё несколько замечательных эпизодов. Следуя предложению Пуанкаре, астроном Гильден опубликовал в *Докладах Парижской Академии*

Наук (*C. R. Acad. Sci.*, Paris, vol. 107, 1888) заметку «Несколько замечаний о представлении иррациональных чисел цепными дробями».

Его исследования были позже продолжены в двух огромных статьях:

A. Wimaп. Über eine Wahrscheinlichkeits aufgabe bei Kettenbruchentwicklungen. — Akad. Föhr., Stockholm, vol. 57, 1900, pp. 589–841;

T. Broden. Wahrscheinlichkeits Bestimmungen bei der Gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung Reeller Zahlen. — Akad. Föhr., Stockholm, vol. 57, 1900, pp. 239–266.

Я не сумел проверить, доказали ли авторы этих статей или хотя бы сформулировали ли они результат Кузьмина (а также теорему Биркхофа или нужный её частный случай).

Результаты математических экспериментаторов часто теряются при последующем развитии науки: знаменитая «теория колебаний» Андронова была написана в 1937 году тремя авторами Андроновым, Хайкиным и Виттом, но третья фамилия появилась на обложке книги только много лет спустя, когда издательство объяснило, что Витт не был назван раньше «вследствие трагической ошибки». Что такое «трагическая ошибка 1937 года» было сразу ясно российскому читателю: Витт был расстрелян в Гулаге.

В других случаях результаты неправильно приписываются эпигонам первооткрывателей и по другим причинам, но нужно стараться по возможности восстанавливать истинное происхождение открытий.

Ниже я обсужу происхождение теории обобщённых функций. Эта удивительная история была мне рассказана А. Н. Колмогоровым, Л. Шварцем и С. Л. Соболевым.

Примерно в 1916 году санкт-петербургский математик Н. Гюнтер разработал теорию, которую он назвал «теорией функций областей». Его идея состояла в том, что такие физические понятия, как «материальная точка», «точечный заряд» и «сосредоточенный в точке вихрь поля скоростей жидкости» не поддаются описанию в терминах обычных функций плотности, в то же время как интегралы от этих «плотностей» по различным областям — честные математические объекты (в отличие от плотностей, всюду равных нулю или бесконечности, но имеющих конечные интегралы).

Он придумал эту теорию «функций областей» ради гидродинамических приложений, например, к уравнениям Навье–Стокса. Более поздние знаменитые результаты Ладыженской являются обобщением теорем Гюнтера на другие функциональные пространства (как и Гюнтер, Ладыженская доказала теоремы существования решений трёхмерной задачи с некоторыми особенностями при теореме единственности решений с меньшими особенностями: она долго думала, как и Лере, что турбулентность есть физическое проявление неединственности, в то время как естествоиспытатели давно уже понимали её как неустойчивость и быстрое развитие малых возмущений начальных условий, на что указывал уже Пуанкаре, объяснявший этим невозможность долгосрочного динамического прогноза погоды).

Лет десять спустя после публикаций Гюнтера российское математическое сообщество начало «изживать лузинщину в нашей среде», обвиняя в антипролетарском аристократизме и высокомерии Лузина в Москве и Гюнтера в Ленинграде.

Поэтому Гюнтер позаботился о воспитании пролетарских и даже коммунистических учеников. Лучшим из них оказался дворянин С. Л. Соболев, которому Гюнтер предложил применить свою теорию функций от областей к волновому уравнению и к гиперболическим системам, имея в виду и общественно-полезные сейсмологические приложения. Соболев доказал и опубликовал соответствующие теоремы.

Но, как сказал мне Л. Шварц в 1965 году, Соболев совершил при этом следующую роковую ошибку: «Он опубликовал свою теорию в малочитаемом провинциальном журнале, на малоизвестном языке».

Шварц сразу же ответил на мой естественный вопрос о журнале и языке: статьи Соболева были опубликованы в *Докладах Парижской Академии Наук* (*C. R. Acad. Sci., Paris*) в 1934 году по-французски.

«Мой вклад, — добавил Шварц, — состоял в переводе теории Соболева на английский язык и в публикации её в распространённом и читаемом журнале, под именем *теории распределений*, тогда как Соболев говорил об *обобщённых решениях дифференциальных уравнений*».

Вернувшись в 1965 году из Парижа в Москву, я обсудил всё это с Сергеем Львовичем Соболевым, который сказал мне, что вклад Шварца значительно больше, в особенности при описании преобразований Фурье распределений (т. е. обобщённых функций).

Соболев правильно ссылался на предшествовавшие работы своего учителя Гюнтера (эти ссылки исчезли лишь в более поздних изложениях теории «обобщённых функций Соболева»). Колмогоров, создав теорию когомологий, опубликовал её в четырёх заметках 1935 года (тоже по-французски и тоже в *CRAS*), отмечая во введении к своей статье, что его теория когомологий происходит от результатов экспериментальной математики, формализованных в понятиях «потока» несжимаемой жидкости через поверхность и обобщающих формулы теории магнитного поля, связанные с коэффициентами зацепления кривых, причём он явно ссылается на теорию функций от области Гюнтера, как на вдохновляющий его пример.

Построенная Колмогоровым теория когомологий — алгебраическая конечномерная комбинаторная конструкция, которая переводит на алгебраический язык конечномерных сопряжённых пространств аналитическую теорию Гюнтера функций от областей, являющихся элементами бесконечномерного сопряжённого пространства к обычному пространству функций.

При этом Колмогоров считал свою теорию когомологий комбинацией описанной Пуанкаре версии теоремы де Рама (объяснённой не понявшим Пуанкаре математикам Эли Картаном) с принадлежащими Гюнтеру идеями экспериментальной математики.

Как видно, самые важные достижения современной теоретической математики были получены формализацией и аксиоматизацией предшествовавших им пионерских исследований экспериментально-математических первопроходцев.

Интересно, что и δ-функции Дирака (представляющие собой частный случай предшествовавших им на несколько десятилетий функций от областей Гюнтера) были введены в математику в эксперименталистском исследовании.

Обсуждая пути развития физики, Дирак написал: «Я научился отвергать все физические представления в качестве основ новой теории. Вместо них начинать нужно с математической схемы, даже на первый взгляд не связанной с физикой. Главное — достичь интересной математики» (цитирую по с. 6 книги P. Massani «N. Wiener», Birkhäuser, 1990).

Согласно Дираку, «физические представления» — это просто вежливое название предрассудков предшествовавших поколений.

Вот как Дирак применял свой метод для экспериментального объяснения топологии спинов. Соответствующая математическая теорема $\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2$ влечёт за собой существование элементов второго порядка в группе сферических кос.

Это значит, что можно связать сферическую поверхность с другой (концентрической) бóльшей сферической поверхностью четырьмя (трансверсальными промежуточным сферам) верёвками («нитями») так, что если после этого соединить таким же образом концевые точки нитей с подобными же точками на ещё бóльшей концентрической сфере, то при уничтожении средней их трёх сфер самая меньшая сфера будет связана с самой бóльшей четырьмя нитями тривиальным образом (так что эту связь можно продеформировать в связь четырьмя радиальными нитями, не сталкивая нити в процессе непрерывной деформации).

Начиная приложения теории спинов к квантовой теории электронных систем (с её статистикой Ферми–Дирака), Дирак решил сперва экспериментально проверить упомянутый результат фундаментальной математики, а для этого физически реализовал описанные выше сферические косы второго порядка и сжёг среднюю сферу, после чего бóльшая и меньшая сферы оказались связанными тривиально.

К сожалению, этот эксперимент Дирака не излагается при объяснении спинов ни студентам-математикам, ни физикам (в то время как Дирак не брался объяснить коллегам теорию спинов без этого экспериментального её подтверждения).

Тот факт, что большая часть абстрактно-математических теорем отражает свойства объектов реального мира, допускающие экспериментальную проверку, обычно скрывается от обучаемых при совершенном дедуктивно-аксиоматическом изложении этих утончённых математических теорий.

Жан-Жак Руссо описывает в своей «Исповеди», что никак не мог поверить в своё алгебраическое открытие, что

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

хотя и знал, что раскрыл скобки правильно. Единственное рассуждение, убедившее его в правильности формулы, был рисунок 12.

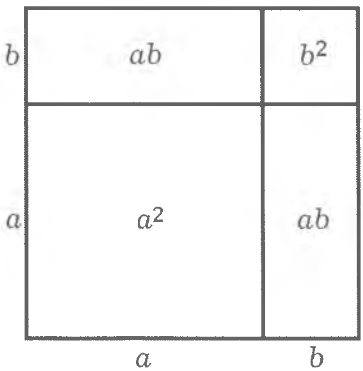


Рис. 12. Экспериментальное доказательство алгебраической формулы из «Исповеди» Ж.-Ж. Руссо.

К сожалению, подобные экспериментальные методы объяснения алгебры совершенно отсутствуют в современных образовательных системах.

Приведу ещё один пример важного и практически полезного математического открытия, сделанного в процессе экспериментирования. «Явление Гиббса» было случайно открыто великим американским физиком Гиббсом при численном суммировании рядов Фурье, которым ему пришлось заняться ради прогнозирования приливов.

Сегодня наиболее яркие применения это открытие находит в томографии, а в учебниках анализа оно почему-то даже не упоминается (приятное исключение — очень интересный, но редко используемый учебник Куранта).

Главное в явлении Гиббса то, что *предел графиков всюду сходящейся последовательности функций может сильно* *отличаться от графика предельной функций* (что от студентов обычно скрывается).

Дело в том, что понятие сходимости последовательности функций весьма нетривиально. Ньютон не давал формального определения. Современное «$\varepsilon - n$» определение было впервые опубликовано Коши. Одна из первых теорем этого наводителя строгости в анализе была опубликована в его учебнике: «предел всюду сходящейся на отрезке последовательности непрерывных функций непрерывен».

Абель, который не сумел понять доказательство Коши этой теоремы, привёл контрпримеры (годится, например, последовательность функций x^n, $n = 1, 2, \ldots$ на отрезке $[0, 1]$: она сходится к нулю при любом $x < 1$ и к 1 в конечной точке $x = 1$).

Вейерштрасс понял позже, что поточечная сходимость определения Коши является неадекватной аксиоматизацией реальной естественно-научной ситуации: он ввёл равномерную сходимость, которая делает непрерывной предельную функцию.

Наблюдение Гиббса состояло в том, что графики функций неравномерно сходящейся последовательности могут сильно отличаться от графика предельной функции.

Заметил он это при анализе частных сумм ряда Фурье разрывной функции (в окрестности простейшей точки разрыва, где левый и правый пределы функции различны, как для функций $\operatorname{sign} x$ вблизи точки $x = 0$).

Нарисовав графики частных сумм ряда Фурье, он заметил экспериментально, что эти графики аппроксимируют более длинный вертикальный отрезок, чем естественное соединение левой и правой ветвей графика разлагаемой в ряд Фурье разрывной функции (рис. 13).

А именно, этот вертикальный отрезок примерно на 18% длиннее, чем необходимая величина разрыва.

Доказательство этого неожиданного математического результата не так уж трудно, достаточно явно разложить в ряд Фурье одну разрывную функцию (например, $f(t) = \operatorname{sign} \sin t$ со скачками ± 2 при $t = \pi$ и 2π). После этого остаётся приближённо вычислить максимумы и минимумы частных сумм ряда Фурье (они окажутся примерно $\pm 1,09$ при большом числе гармоник в частной сумме).

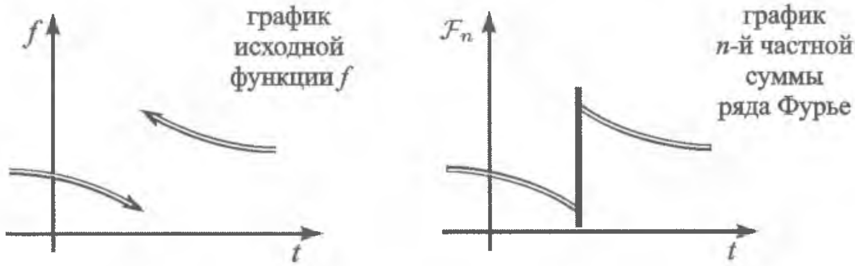


Рис. 13. Явление Гиббса.

Насколько я знаю, эффект Гиббса ускользнул от внимания теоретико-числовиков, которым следовало бы исследовать поведение (вблизи точек разрыва) рядов Фурье по кусочно-постоянным функциям, вроде $\operatorname{sign}\sin(kt)$ и $\operatorname{sign}\cos(kt)$.

Я сосчитал их для 2π-периодической функции f, равной -1 при $0 < t < 2\pi\lambda$ и $+1$ при $2\pi\lambda < t < 2\pi$. По-видимому, эффект типа явления Гиббса зависит здесь от поведения разложения параметра λ в цепную дробь. Для золотого сечения λ я нашёл бóльший 9% Гиббса дополнительный отрезок, но никаких асимптотических теорем, описывающих эти явления, я не доказал.

Приложения явления Гиббса в томографии очень важны: на томограммах врачи видели странные прямые линии, не отражающие на самом деле никаких границ биологического происхождения, но происходящие вследствие явления Гиббса при компьютерной оборабботке наблюдённого сигнала, включающей суммирование ряда Фурье. Не знавшие явления Гиббса врачи принимали эти компьютерные артефакты за проявления таинственных болезней и пытались их лечить.

Ниже я поясню, почему явление Гиббса приводит к появлению на томограммах лишних прямых линий.

Томографическое изображение описывает плоское сечение тела. Плотности различных тканей тела различны, и они описываются функцией двух переменных. Наблюдаются поглощения различных лучей $R(\varphi, p)$ в плоскости сечения тела: угол φ определяет направление луча, а параметр p нумерует параллельные лучи, будучи расстоянием от некоторого центрального луча заданного направления.

Ослабление волны, распространявшейся вдоль этого луча, измеряется приборами, доставляя информацию об интеграле

$$F(\varphi, p) = \int f(r)dr, \quad r \in R(\varphi, p),$$

где $f(x, y)$ — некоторая характеристика плотности тела в точке $r = (x, y)$ луча R (рис. 14).

Следующий шаг состоит в восстановлении функции f по измеренным значениям функции F (это восстановление называется «обратным преобразованием Радона», так как переход от f к F называется преобразованием Радона).

Обратное преобразование Радона осуществляется компьюте-

го технику преобразования Фурье.

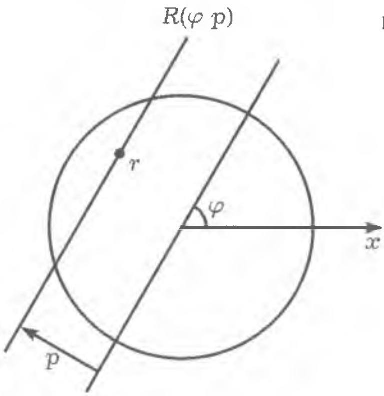


Рис. 14. Преобразование Радона F описывающей плотность тела функции f, измеряемое томографом.

Действительно, коэффициенты Фурье функции f

$$\tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \iint e^{(\tilde{x}x + \tilde{y}y)} f(x, y)\, dxdy$$

являются одномерными коэффициентами Фурье преобразования Радона, так как написанный выше двойной интеграл можно переписать в виде одномерного интеграла

$$\tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \int e^{i(\tilde{r}, r)} I(r)\, dr,$$

где $I(r)$ обозначает интеграл функции f вдоль прямой линии, где $\tilde{x}x + \tilde{y}y = r$.

Для вычисления функции f достаточно сосчитать интеграл (практически, сумму) её гармоник Фурье, амплитуды которых доставляются одномерными коэффициентами Фурье преобразования Радона F, измеренного томографическим рецептором.

Эти простые рассуждения составляют весь замысел томографии. Но при практическом суммировании ряда Фурье (или интеграла) существенна гладкость функции, разлагавшейся в ряд (или интеграл) Фурье: коэффициенты Фурье высокого порядка гладкой функции быстро убывают с ростом порядка коэффициента (который выше обозначался символами $(\tilde{x}, \tilde{y})$ в двумерном случае и символом $\tilde{r}$ в одномерном).

Плотность человеческого тела $f(x, y)$ — не всюду гладкая функция, она даже разрывна (например, на границах костей). Поэтому при суммировании ряда Фурье, выполняемом компьютером для вычисления обратного преобразования Радона $F \mapsto f$, в точках разрыва возникает явление Гиббса.

В обычном одномерном случае, обсуждавшемся выше, артефакты (лишние 9% отрезка между ветвями графика на рис. 14) сосредоточены в точках разрыва.

В двумерном случае каждая гармоника Фурье представляет собой плоскую волну, постоянную вдоль линий волнового фронта. Явление Гиббса, происходящее от плохой сходимости в присутствии разрыва, порождает артефакты вдоль всей касательной прямой к кривой разрывов.

Происходящее вследствие этого чрезвычайно большие значения искомой функции f особенно велики в точках двойных касательных прямых (касающихся границы костей в двух точках), а также в точках касательных прямых к линии границы кости, проведённых в точках перегиба этой линии.

Поэтому томографическое изображение плоского сечения вашего тела будет содержать, наряду с ограничивающими изображения костей кривыми линиями, странные прямые линии (отсутствующие внутри вашего тела): эти линии касаются ограничивающих кости кривых дважды или в точках перегиба (рис. 15).

Рис. 15. Томографические артефакты, порождённые явлением Гиббса на границах изображений костей.

Взаимодействие экспериментальных наблюдений с глубокими математическими теориями ясно видно в описанном выше примере (томографических артефактов, происходящих от явления Гиббса). Но во многих других случаях подобное взаимодействие менее очевидно, особенно когда соответствующие математические теории слишком трудны для экспериментатора.

Знаменитый физик, нобелевский лауреат Л. Д. Ландау часто объяснял многие трудные явления совершенно необычными рассуждениями. Приведённые ниже примеры заимствованы из пародии на его лекции, прочитанной на сцене во время чествования дня рождения Ландау студентами Московского Физико-Технического института (в то время, когда Ландау был ещё вполне активен, в годы, предшествовавшие его автокатастрофе).

— Утверждение Ландау: «все нечётные числа простые: число 3 просто, 5 просто, 7 тоже просто...»

— Вопрос студента: «а число 9 тоже просто?»

— Ответ Ландау: «конечно нет, $9 = 3 \cdot 3$. Я забыл упомянуть об этом исключении, о числе 9. Смотрите: 11 и 13 опять просты...»

— Вопрос студента: «а пятнадцать?»

— Ответ Ландау: «15 — ошибка эксперимента, 17 и 19 — опять простые».

«Курс арифметики Ландау» содержал много замечательных открытий:

«пятью пять — двадцать пять, шестью шесть — тридцать шесть. Следовательно, семью семь — сорок семь».

Мне было трудно слушать подобные лекции, поэтому я не разу не пошёл на лекции Ландау. Но его ученики и сотрудники много раз демонстрировали мне его замечательный стиль ведения семинара, и мне хватало этого опыта, приобретённого в студенческие годы в Московском Университете, так что я так ни разу и не видел Ландау, а только переписывался с ним.

Вот что я слышал на таком семинаре во время доклада иностранного профессора X, рассказывавшего о своих недавних открытиях в Москве. Через несколько минут после начала доклада пожилой московский профессор Ш сформулировал вопрос: «вы сказали, что A меньше, чем B, но я не понимаю, почему $A < B$».

Лидер семинара (ученик Ландау) возразил: «это не вопрос, а утверждение: ты не понимаешь потому, что ты дурак».

Но Ш настаивал, и тогда лидер семинара сказал: «ладно, старые профессора ничего уже не могут, но первокурсник Д за несколько секунд справится с его трудностью».

Через пять минут не справившийся первокурсник был заменён аспирантом К, и ещё через десять минут лидеру пришлось самому показывать семинару, как надо работать.

Но и он не справился — пришлось просить помощи у докладчика X, который быстро доказал, что $A > B$.

Профессор Ш просиял: «теперь всё в порядке, у меня ведь был с самого начала контрпример к утверждению докладчика, что $A < B$, из-за этого я и задал свой вопрос!»

Привыкнув к подобному стилю семинаров учеников Ландау, я почему-то никогда не выступал в роли Д или К предыдущей дискуссии. Но я внимательно изучал один за другим многие тома учебника Ландау и Лифшица, и, когда мне было около 20 лет, послал Ландау письмо, где перечислил несколько дюжин ошибок этих книг: иногда я писал, что семью семь не совсем сорок семь, но в других случаях окончательный ответ был правильно списан авторами из других учебников, но имевшиеся там «трудные» доказательства оказались заменёнными недоступным моему пониманию вздором.

Через несколько недель Ландау ответил мне, что все мои замечания справедливы, и что они будут учтены в ближайшем переиздании учебников, которое состоится в Америке через два года.

Два года спустя я прочитал новую версию. Ошибочные рассуждения были заменены совершенно новыми доказательствами, которые, однако, были совершенно ошибочными (доставляя «короткие доказательства» трудных верных математических теорем, обычно доказываемых на многих страницах).

Позднее, когда Ландау уже не мог работать, его ученики и сотрудники, Зельдович и Питаевский, попросили меня переписать ошибочные доказательства Ландау (для нового русского издания), так что в последних изданиях неверные доказательства Ландау заменены моими верными.

Но следовать логике стиля Ландау я так и не научился. Так, моя статья об адиабатических инвариантах была отвергнута главным российским физическим журналом (*ЖЭТФ*) со следующим объяснением (которое мне сообщил бывший тогда заместителем главного редактора Михаил Александрович Леонтович): «в статье утверждается, что из A вытекает B, в то время как каждый физик знает, что A из B не вытекает».

Я пытался объяснить, что эти знания, доступные и мне, ничуть не противоречат моему утверждению, но Михаил Александрович убедил меня, что, согласно Ландау, утверждение «из A вытекает B» означает, что «A и B эквивалентны».

Отвергнутая статья была опубликована в математическом журнале, а год спустя Гарфильдсовский журнал *Индекс цитирований* попросил меня объяснить причины необычно большого числа цитирования этой статьи (насчитав тысячи цитировавших физиков и специалистов по космическим исследованиям, но ни одного математика). Ещё через год эта статья была удостоена Ленинской премии (она входит в цикл работ Колмогорова и Арнольда, известных сегодня как «теория КАМ»). Интересно, что математическое подразделение Комитета по премиям отвергло все эти работы, считая их слишком прикладными (то есть относящимися к небесной механике, теории магнитных ловушек плазмы, адиабатическим инвариантам и вращению искусственных спутников — какая же это математика? Математики должны исследовать пустые множества и нигде не дифференцируемые группы!) Однако на общём заседании всего Комитета работы Колмогорова и Арнольда были признаны достойными

Премии (за счёт голосов тех же физиков, которые отвергли одну из главных работ этой серии в *ЖЭТФ*).

Я предполагаю, что недооценка относящихся к реальному миру работ математиками объясняется тем, что экспериментально-математический характер этих исследований слишком труден для дедуктивных аксиомофилов, привыкших исследовать уравнения, не имеющие решений, или всюду расходящиеся ряды.

Чтобы объяснить разницу точек зрения «дедуктивных математиков» и «эксперименталистов» на простейшие понятия математики, я обсужу сейчас определение производной.

Следуя Ньютону, я верю, что

$$\frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \sec^2 x.$$

Точка зрения дедуктивных аксиомофилов — совершенно другая. Они говорят, что тангенс — функция недифференцируемая, так как дифференцируемые функции непрерывны, а тангенс — нет.

Что теряется при таком подходе — совершенно ясно. Менее очевиден следующий пример, связанный с гидродинамической теорией турбулентности. Я рассказал о некоторых новых идеях в этой области в 1965 году на семинарах Р. Тома и Дьедонне, упомянув, в том числе, о приложениях теории бифуркаций Пуанкаре и Андронова к исследованию роста размерности аттракторов при росте числа Рейнольдса и об отрицательности кривизны группы диффеоморфизмов, ведущей к невозможности долгосрочного динамического прогноза погоды.

Реакция «чистых» математиков была для меня неожиданной. Дьедонне категорически возражал против обсуждения связи между римановыми кривизнами и метеорологией (как и вообще против любой «нечистой» науки, отличной от аксиомофильского переливания из пустого в порожнее).

Другие слушатели, более молодые, опубликовали то, что я им рассказал, под именем принадлежащих им гипотез. Тем самым они исправили мою ошибку, состоявшую в том, что я своего тогдашнего доклада не опубликовал. Интересно, что некоторые из моих гипотез, сформулированных в этом докладе, аксиомофилы считают доказанными в их последовавших работах, тогда как я считаю эти гипотезы не доказанными и сегодня.

Одна из гипотез (принадлежавшая Колмогорову) состояла в том, что предельные режимы решений уравнений Навье–Стокса бифуцируют при уменьшении вязкости (или при увеличении числа Рейнольдса), от ламинарного течения (соответствующего точечному аттрактору векторного поля в пространстве полей скоростей жидкости) к предельным режимам большей размерности.

Сначала аттрактором становится предельный цикл (соответствующий периодическим пульсациям поля скоростей жидкости), а затем предельный режим становится более сложной динамической системой бо́льшей размерности (для которой первоначально малые возмущения начального условия приводят к экспоненциально растущему со временем возмущению результирующего предельного режима течения жидкости).

Эта гипотеза Колмогорова имела у него два варианта. Первое утверждение состоит в том, что при достаточно больших числах Рейнольдса появляются многомерные предельные режимы, а второе — в том, что все маломерные (включая предельные циклы, двумерные предельные множества и так далее) исчезают при достаточно больших числах Рейнольдса (так что все ламинарные течения становятся неустойчивыми, как и все периодически пульсирующие течения и т. п.).

Склонные к дедуктивной математике специалисты формализовали эти утверждения Колмогорова в виде гипотез об аттракторах. Аттрактором называется инвариантное подмножество фазового пространства динамической системы, такое что всякая траектория, начинающаяся в его достаточно малой окрестности, с течением времени приближается асимптотически к этому аттрактору.

Эти формально определённые аттракторы аксиомофилов — вовсе не те «предельные режимы», о которых говорил Колмогоров, и существование многомерного аттрактора нисколько не противоречит маломерности соответствующего предельного режима, как я сейчас объясню.

Предположим, например, что фазовое пространство содержит инвариантную окружность, притягивающую все соседние орбиты (рис. 16).

Вдоль инвариантного одномерного многообразия векторное поле рисунка 16 устроено так: имеется два положения равновесия (точки N и S), где вектор поля равен нулю, а между ними векторы поля направлены вдоль инвариантной окружности от N к S.

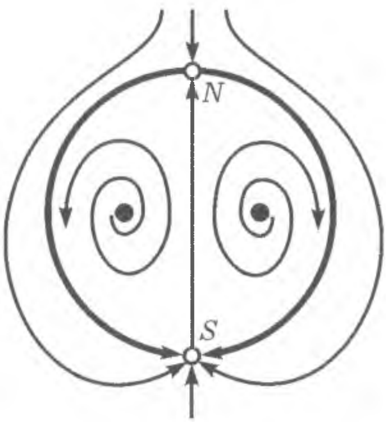


Рис. 16. Одномерный аттрактор в системе с нульмерным предельным режимом S.

Эта система имеет одномерный аттрактор (окружность), так что при помощи такой системы можно доказывать рост размерности аттрактора (от нуля до единицы). Однако предельное поведение системы при почти любом начальном условии выводит её к «ламинарному» аттрактору S размерности нуль: инвариантная окружность удовлетворяет дедуктивно-аксиомофильскому определению аттрактора, но с точки зрения экспериментальной и естественно-научной этот аттрактор — вовсе не тот предельный режим, о котором идёт речь в гипотезе Колмогорова.

При формализации относящихся к реальному миру идей в дедуктивно-аксиоматической системе нужно быть очень осторожным, так как абстрактные понятия обладают опасным скрытым свойством неадекватного описания явлений. Это замечание было явно сформулировано уже Р. Бойлем («Hydrostatical

Paradoxes», The Works, London, 1772, vol. 2, pp. 739–740): «экспериментальные доказательства предпочтительнее математических, так как последние основаны на предположениях и постулатах, которые легко могут вести к ошибкам, вследствие абстрактной природы математических объектов».

Заключение Бойля, что никаким математическим рассуждениям нельзя доверять при объяснении явлений природы, является, однако, преувеличением. Это преувеличение объясняется, вероятно, странной философией его эпохи, особенно ярко выразившейся в картезианских принципах развития науки.

Из нескольких дюжин принципов Декарта я процитирую здесь только четыре особенно опасных принципа.

Первый принцип: *никогда не следует сравнивать исходные положения теорий с какой-либо реальностью при помощи экспериментов, эти исходные положения — просто произвольные высказывания, и вопрос об их адекватности явлениям реального мира не имеет никакого научного значения.*

Второй принцип: *никогда не следует сравнивать с экспериментами окончательные выводы научных теорий.* Если исходные положения противоречили наблюдениям реального мира, то нет причин надеяться на отсутствие таких противоречий у окончательных выводов.

«Третьим» я назову следующий принцип: *наука представляет собой цепь Аристотелевых дедукций, начинающуюся с исходных аксиом. Чтобы эти дедукции были научными, необходимо полностью исключить из них всякое участие воображения.*

В математике это означало, прежде всего, полное исключение геометрии, чертежи которой являются, вдобавок, рудиментами экспериментальной деятельности, запрещённой первыми двумя принципами, предоставляющими притом обильную пищу воображению.

Поэтому предлагалось исключить из математики все прямые, окружности, многогранники и тому подобное, заменяя их (в современных терминах) кольцами и алгебрами, идеалами и модулями.

Такими были исходные принципы создания «аналитической геометрии» [2].

«Четвёртый» принцип Декарта был опаснее всех: он состоял в том, что *«правительству следует немедленно запретить все другие методы преподавания, кроме моего, который является единственным логически корректным методом, позволяя самым посредственным ученикам продвигаться в изучении наук столь же быстро, как и самым гениальным»*.

Принципы Декарта были осуждены Монтенем за много лет до их публикации Декартом. Согласно Монтеню, французская наука и французские учёные отличаются от всех других следующим: ни одно их слово не должно никому быть понятным (иначе читатели и слушатели сочтут, что автор не внёс ничего нового), и полностью отсутствуют ссылки на предшественников (особенно иностранных).

Монтень написал, что такие недостатки никогда не потерпела бы ни одна цивилизованная страна (он упоминает, в качестве примеров, Рим и Испанию, Англию и Голландию, Германию и Швецию).

В качестве многолетнего члена «Комитета по защите наследия французской науки от иностранцев» бывшего Министерства Науки, Образования и Технологии Республики Франции, я могу подтвердить устойчивость приведённых характеристик французской науки и французских книг, опубликованных Монтенем в 1585 году (в книге, посвящённой им Королеве Марго).

Чтобы показать, как практически применялись принципы Декарта, я опишу ниже его дискуссию с Паскалем о гидродинамических и барометрических открытиях последнего.

---

[2] Система «декартовых координат» (Манхэттена) была изобретена за много веков до Декарта: положение каждого легиона в римском лагере определялось ортогональными проекциями места его стоянки на две основные магистрали лагеря, Запад–Восток и Север–Юг. В Париже и сейчас имеется знак «Jeux Descartes» в точке пересечения этих осей древнего римского лагеря латинского квартала, сохранившего здесь прямоугольную планировку (это начало координат находится на пересечении улиц Сен Жак и Школ вблизи Сорбонны, но надпись «Jeux Descartes» интерпретируется сегодня как «jeux des cartes» («игры в карты») и используется для продажи карточных колод.

Первая реакция Декарта была протестом против нарушения опытами Паскаля первого принципа Декарта: Декарт объяснил Паскалю, что его опыты научной ценности не имеют, а нужно выводить следствия из аксиом.

Паскаль ни о каких аксиомах гидростатики не слышал, и тогда Декарт процитировал ему аксиому Аристотеля: «природа не терпит пустоты». На этом основании Декарт отбросил «Торичеллеву пустоту», которую наблюдал Паскаль. Позже Декарт даже написал Гюйгенсу: «что же касается пустоты, то я её нигде в природе не нахожу, кроме как, быть может, в голове у Паскаля» [3].

Несколько месяцев спустя после беседы Паскаля с Декартом теория Паскаля стала общепринятой. Друзья спрашивали Декарта, какого он мнения об открытиях этого молодого человека. Ответ Декарта был вполне искренним: «он мне рассказывал свою теорию несколько месяцев назад, но ничего не понимал, так как даже не знал соответствующих аксиом. Но я ему всё объяснил, и теперь он выдаёт мою теорию за свою».

Я высоко ценю замечательные математические открытия Декарта. Например, «правило Декарта» оценивает число положительных корней многочлена числом перемен знаков в последовательности его коэффициентов, и это правило явилось основой важной сегодняшней теории «малочленов» моих студентов (прежде всего — Севастьянова, Кушниренко и Хованского).

А именно, число перемен знаков не может превосходить число ненулевых коэффициентов многочлена. Теория малочленов доставляет картезианскую версию теоремы Безу: число корней

---

[3] Подробное описание взаимодействий Декарта с Паскалем и с Гюйгенсом опубликовано в газете *Монд* (*Le Mond*, 3 avril 1998, p. 24) в статье Henree Gee («L'Auvergue, berceau du voyage spatial»).

Дальнейшие ссылки на взаимодействия Декарта (и Ньютона) с другими учёными имеются в обширной библиографии книги химика И. С. Дмитриева «Неизвестный Ньютон» (СПб.: Алетея, 1999).

Следующие обскурантистские слова Декарта опубликованы в первом томе его Избранных Сочинений (Москва, 1989, с. 419–420): «следовать выдуманным причинам явлений столь же полезно, как и настоящим: успех может быть одинаковым, когда мы исследуем следствия подлинных и надуманных причин, даже когда последние ошибочны».

полиномиальной системы уравнений в многомерном вещественном пространстве оценивается сверху числом одночленов, входящих в многочлены системы (это число корней может оказаться намного меньшим, чем оценка Безу, где место числа одночленов занимает степень многочлена).

Топологические инварианты алгебраических многочленов оцениваются в этой теории через число одночленов или через сложность формулы, задающей «малочлены». Грубо говоря, здесь действует принцип: для повышения на единицу какого-либо числа Бетти, измеряющего топологическую сложность алгебраического многообразия, нужно увеличить на единицу число членов в задающих многообразие формулах.

Некоторая часть этих малочленных оценок топологической сложности алгебраических многообразий сверху переносится и на топологические инварианты многообразий, заданных дифференциальными уравнениями (обыкновенными или с частными производными).

Однако, такие вопросы, как вопрос 16-й проблемы Гильберта о числе предельных циклов векторного поля на плоскости, компоненты которого являются квадратичными многочленами, остаётся открытым, хотя предполагаемая оценка составляет всего четыре цикла.

Декартова теория радуги показывает, что её производят капли дождя, расположенные на поверхности конуса с раствором примерно 43°, ось которого направлена от глаза наблюдателя к противосолнечной точке. Это — один из первых результатов теории каустик. Декарт вывел величину угла в 43° из индекса преломления воды, равного 4/3 (по закону Снелла).

Но Декарт вывел из этого же закона, будто скорость света в воде на треть *больше*, чем в воздухе. Это строгое заключение противоречит и оптическому принципу Ферма, и принципу огибающих Гюйгенса теории распространения волн, и многим другим вещам, но эта ошибка Декарта является замечательным подтверждением слов Бойля, что абстрактная математика опасна для естествоиспытателя и что математические умозаключения подлежит проверять экспериментами.

Возвращаясь от «старинных мастеров» (молитвы мастеров Гумилёва) к сегодняшнему дню, я процитирую дискуссию между Л. С. Понтрягиным и Я. Б. Зельдовичем, написавшим замечательную книжку «Высшая математика для начинающих физиков и техников». Понтрягина оскорбило определение производной в этой книге как отношения приращения функции к (не слишком большому) приращению аргумента.

Понтрягин потребовал упоминания предельного перехода (при стремлении приращения аргумента к нулю). Зельдович, однако, отвечал: «нет, это невозможно: когда приращение аргумента станет меньше 10^{-30} или даже меньше 10^{-8} сантиметра или секунды, то структура пространства и времени на столь малых расстояниях будет, из-за квантовых эффектов, столь сильно отличаться от математического континуума, что математические пределы потеряют всякую связь с описанием результатов экспериментов».

Согласно Зельдовичу, нужны всегда именно отношения конечных приращений. Но вычислять их столь трудно, что обычно приходится использовать более просто вычисляемые асимптотические приближённые формулы, нужно только не забывать, что эти приближения пригодны только для определённой области изменения приращения, которые не должны быть ни слишком большими, ни слишком малыми.

Оставаясь математиком, несмотря на многолетнее и плодотворное сотрудничество с Зельдовичем, я приведу здесь ещё один пример разумной эксперименталистской критики абстрактной математики.

Мой близкий друг М. Л. Лидов был ведущим баллистиком, рассчитывающим орбиты искусственных небесных тел, спутников, лунных экспедиций и т. п.

Однажды, примерно около 1960 года, он сказал мне: «теорема единственности твоего курса теории обыкновенных дифференциальных уравнений совершенно не верна, несмотря на совершенно строгое её доказательство» («в котором, — добавил он, — я не сомневаюсь»).

Дело в том, что интегральные кривые дифференциального уравнения $dx/dt = -x$ с начальными условиями $x(0) = 1$ и $x(0) = 0$ явно пересекаются на любом компьютерном графике: при $t = 30$ или даже 10 между этими кривыми не вставишь и атома.

Таким образом, совершенно правильное и строго доказанное математическое утверждение, что эти интегральные кривые не пересекаются, противоречит физической реальности.

Лидов объяснил мне, какое отношение эта теорема единственности имеет к технологии причаливания корабля к пристани. Эта технология состоит в том, что в последний момент матрос бросает на берег канат, а затем, спрыгнув туда сам, наматывает этот канат на кнехт и вручную притягивает судно, выбирая руками метр-другой каната.

Необходимость подобного ручного причаливания объясняется именно теоремой единственности, работающей здесь против нас.

Дело в том, что обычные принципы теории управления движением требуют выбирать скорость приближения к берегу, dx/dt, при помощи петли обратной связи, то есть выбирая скорость в зависимости от оставшегося расстояния,

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

Имея это в виду и предполагая функцию f гладкой (или хотя бы удовлетворяющей условию Липшица), мы выводим из теоремы единственности, что время причаливания должно быть бесконечным.

Или же следует полагаться на ненулевую скорость приближения в последний момент, то есть удар о пристань (ради чего её край и обвешивается использованными автопокрышками, даже в случае, когда заключительный шаг причаливания выполняется вручную).

Причина, по которой Лидов знал все эти детали причаливания кораблей, состояла в том, что ему нужно было сажать ракеты на поверхность Луны. Управляемая мягкая посадка противоречит и здесь теореме единственности. Выбранный практически метод (рис. 17) состоит в демфировании заключительного удара за счёт недолгих асцилляций колен «ног» треноги ракеты.

Лидов был и замечательным математиком. Однажды он поставил себе следующий вопрос. Орбита Луны образует небольшой угол (в несколько градусов) с плоскостью эклиптики, в которой Земля вращается вокруг Солнца. Малые колебания

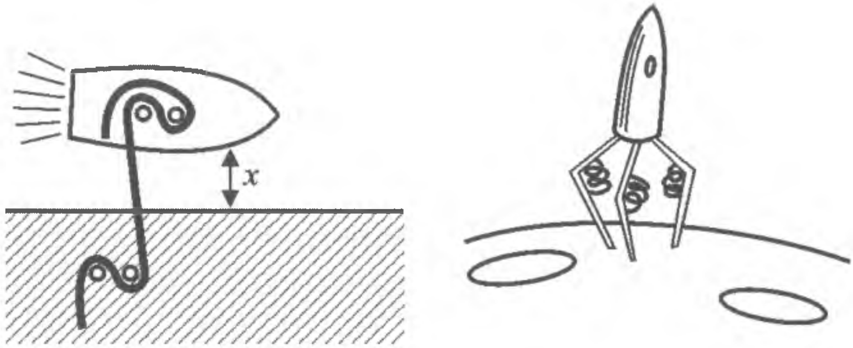


Рис. 17. Причаливание корабля и посадка на Луну (вопреки теореме единственности теории дифференциальных уравнений).

этого угла (в основном обязанные возмущающему движение Луны вокруг Земли притяжению Солнца) вызывают время от времени затмения.

Знаменитая теорема Лапласа об устойчивости (доказанная им только в первом приближении) состоит в том, что это движение Луны устойчиво: колебания орбиты остаются малыми в течение миллионов лет, и Луна остаётся на том же среднем расстоянии от Земли (равном около 60 радиусов Земли, т. е. примерно 380000 км), никогда не падая на Землю и никогда не удаляясь от неё слишком далеко.

Вопрос Лидова состоял в следующем: а что случилось бы, если бы орбита Луны (имея такую же форму) была сильно наклонена к плоскости эклиптики (например, градусов на 80 вместо наблюдаемого наклона 5°).

Конечно, практически невозможно так повернуть орбиту Луны. Но вполне возможно запустить на подобную сильно наклонённую орбиту «псевдолуну». Её кеплерова орбита движения относительно Земли будет возмущаться (прежде всего — притяжением Солнца), и вопрос сосотоит в том, сильно ли эти возмущения изменят со временем наклонённую орбиту?

Ответ оказался совершенно неожиданным: Лидов обнаружил, что такая псевдолуна упадёт на Землю очень скоро (примерно за четыре года).

Странность этого результата состоит в том, что он кажется противоречащим теореме Лапласа (которая ведь утверждает, что большие оси кеплеровых эллипсов не имеют вековых возмущений, что означает приблизительное постоянство среднего расстояния от спутника до Земли в течение длительного времени).

Лидов, однако, объяснил мне, что никакого противоречия с теоремой Лапласа нет: среднее расстояние (и, значит, длина большой полуоси кеплерова эллипса) останется почти постоянной во всё время падения, и длина этой полуоси составит прежние 380000 км даже в самый момент падения.

А именно, хотя длина большой полуоси эллипса остаётся почти постоянной, его эксцентриситет будет расти, так что эллипс, который был первоначально почти окружностью, сделается тонким, приближаясь под конец к (дважды пройденному) отрезку длиной $2 \cdot 380000$ км. Псевдолуна будет двигаться по такому утончающему эллипсу.

Но Земля — не точка, а шар (радиуса около 6400 км). Поэтому, когда малая ось сжимающегося к отрезку эллипса станет меньше этого радиуса, орбита пересечёт Землю, и псевдолуна упадёт, хотя её среднее вдоль кеплеровой орбиты расстояние до Земли и останется прежним (рис. 18).

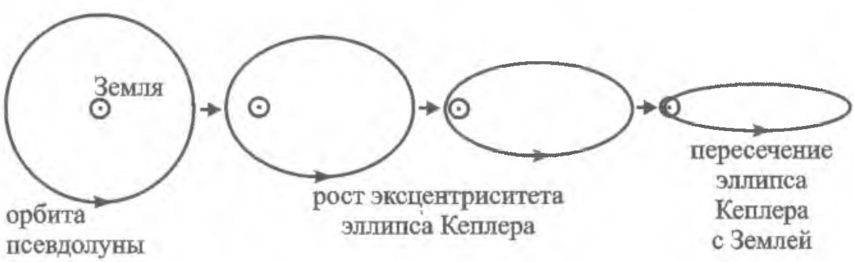


Рис. 18. Лидовское описание падения псевдолуны на Землю (примерно за 4 года).

Чтобы закончить грустную историю экспериментальной математики счастливым концом, я опишу теперь некоторые малоизвестные математические результаты А. Д. Сахарова. Он учился в юности математике у моего отца (это подробно описано в

«Воспоминаниях» А. Д. и привело его к постоянному интересу к математике, а также к ряду математических открытий и гипотез).

О своих математических результатах Сахаров рассказал мне немного, но после его смерти его коллеги передали мне для комментирования его математические рукописи, и я с удовольствием прочитал его интересные описания своих математических работ.

Открытие, о котором я расскажу здесь, было чисто экспериментальным. Жена попросила Андрея Дмитриевича осенью нашинковать несколько капустных кочанов. Технология шинкования такова: сначала кочан делится на горизонтальные слои параллельными разрезами, а потом каждый такой слой рубится на мелкие выпуклые кусочки случайными ударами ножа (рис. 19).

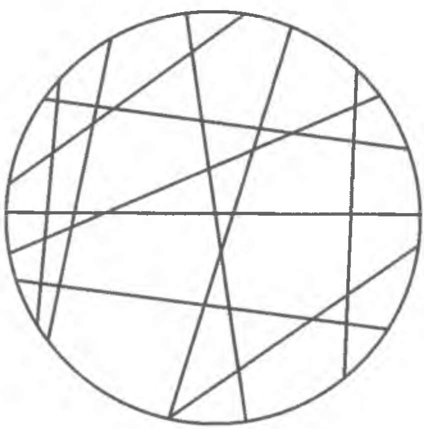


Рис. 19. Разрезание Сахарова капустного слоя одиннадцатью разрезами на 42 выпуклых куска, имеющих 165 углов.

Выполняя эту механическую работу, Сахаров не мог прекратить свои размышления. Он заметил, что получающиеся выпуклые многоугольники различны: некоторые из них — треугольники, но встречались и четырёхугольники, и пятиугольники, и т. д. Он стал считать, сколько встречается тех и других, и пришёл к заключению: среднее число сторон кусочка оказалось равным четырём!

Другое его наблюдение касалось форм кусочков. Оказалось, что (безразмерное) отношение средней площади кусочка к квадрату среднего периметра кусочка такое же, как если бы кусочки были кругами ($\pi r^2/(2\pi r)^2 = 1/(4\pi)$).

Это кажется противоречащим изометрическому неравенству, утверждающему, что для круга отношение площади к квадрату периметра больше, чем для любой другой плоской фигуры. Но Сахаров догадался, что противоречия тут никакого нет: ведь средняя площадь и средний периметр достигаются на различных кусочках разбиения!

Продумывания гипотезу Сахарова о в среднем равном 4 числе сторон кусочка, моя итальянская ученица Ф. Аикарди доказала эту гипотезу вместе с её многомерным обобщением.

Рассмотрим выпуклые многогранники в евклидовом пространстве какой-либо размерности, получая их из какого-либо тела разрезанием многими (N) случайно выбранными гиперплоскостями. Вычислим среднее число вершин частей, среднее число рёбер, граней любой размерности k.

Теорема состоит в том, что предел каждого их этих средних при $N \to \infty$ равен числу граней размерности k у куба, разрезаемого гиперплоскостями евклидова пространства.

Например, в обычном трёхмерном пространстве среднее число вершин трёхмерного кусочка равно 8, среднее число ребёр равно 12, а среднее число граней равно 6 (хотя отдельные кусочки вовсе не похожи на параллелепипеды и имеют разные числа вершин, ребёр и граней).

Странным образом, мои друзья обнаружили позже, что эти открытия Сахарова и Аикарди не новы. А именно, Л. Шлефли обнаружил те же факты в 1852 году.

Однако, его открытие было столь удивительным для тогдашних математиков, что его оценили и опубликовали лишь через 50 лет. Его «Theorie der vielfachen Kontinuitat» входит сейчас в Gesamelte Mathematical Abhaudlunge L. Schlafli, Birkhäuser, Basel, 1950 (нужное место — с. 209–212 в первом томе).

Открытия экспериментальной математики часто пренебрегаются высокомерными современниками, но в конце концов они всегда находят своё место в сокровищнице науки.

В своём обсуждении «Могут ли машины мыслить» А. Тьюринг подчёркивал, что новые математические открытия получаются вовсе не при логическом последовательном выводе новых следствий из предыдущих познаний, а скорее зависят от неожиданных скачков идей, вызванных оригинальными экспериментами.

Закон тяготения Ньютона был открыт Гуком, который экспериментально исследовал орбиты маленьких шариков, катающихся вдоль различных гладких поверхностей, имитирующих разные законы притяжения. Он обнаружил в этих экспериментах, что замкнутые орбиты получаются именно в случае силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния до притягивающего центра. Этот закон обратных квадратов уже обсуждался до того Кеплером; он был также известен древним халдеям в Вавилоне, вместе с выводом эллиптичности орбит. Ньютон писал позже, что ему принадлежит честь восстановить для современного человечества эти древние доказательства, сгоревшие при пожаре Александрийской библиотеки, хранившей всю египетскую науку.

Лемма Стокса, основная в теории когомологий, была изобретена лордом Кельвином (Thompson), работавшим при этом над электромагнитными экспериментами.

Имя Стокса дал этой теореме Максвелл, который, будучи студентом Тринити Колледжа в Кэмбридже, получил это утверждение в качестве задачи на экзамене «Трайпос». Он спросил затем экзаменаторов, кто предложил такую замечательную задачу. Оказалось, что профессор Стокс, от которого для Трайпоса срочно требовали задачу, никакой задачи не придумал, а потому отдал организаторам экзамена лежавшее у него на столе письмо Кельвина, описывающее его новый результат.

Максвелл основал на этой лемме всю свою теорию электромагнитного поля. Общество и государства никогда не могли расплатиться с учёными и с наукой за эти великие открытия, которые образуют основу всей современной цивилизации, но которые начинались с экспериментирования с янтарём и кошачьей шерстью.

Современная топологическая «теория Морса» (составляющая сегодня основу недавних достижений квантовой теории поля) началась с замечаний А. Кэли (опубликованных около

1860 года в «Литературных добавлениях» к газете *Таймс*), описывающих сложные конфигурации горизонталей на географических картах горных районов.

Эти конфигурации обладают удивительными топологическими свойствами, начиная с «теоремы Эйлера» (доказанной до Эйлера Декартом), утверждающей, что сумма чисел вершин и граней выпуклого ограниченного многогранника на 2 превосходит число его ребёр:

$$8 + 6 = 2 + 12 \text{ для куба (гексаэдра),}$$
$$4 + 4 = 2 + 6 \text{ для тетраэдра,}$$
$$20 + 12 = 2 + 30 \text{ для додекаэдра.}$$

Из этой теоремы следует, что сумма чисел вершин и котловин на острове превосходит число перевалов на нём на единицу, и Кэли предложил экспериментально исследовать эту географическую топологию (позже перенесённую Пуанкаре на многомерные многообразия).

Интересно отметить, что эксперименталист Кэли исследовал почти в то же время топологическую сторону того, что теперь называется «теорией катастроф». В том числе он открыл все «семь элементарных катастроф Тома» в своём экспериментальном исследовании каустик (где он изучил огибающие семейств нормалей к эллипсоидам и поверхность их центров главных кривизн), а также волновых фронтов (например, он исследовал семейство эквидистантных поверхностей эллипсоидов, являющихся мгновенными фронтами возмущений, распространяющихся от поверхности эллипсоида в ограниченную им область). Эти открытия экспериментального математика связываются сегодня с классификацией простых комплексных алгебр Ли. Но первопроходцем, сделавшим возможной эту глубокую современную математическую теорию, был экспериментатор Кэли, не подозревавший о связи изученных им алгебраических поверхностей с алгебрами Ли.

В семинаре института математики Университетов Париж-6 и Париж-7 15.06.2005 мнение автора, что студентов следует учить, что $7 \cdot 8 = 56$, оспаривалось коллегами-французами, предпочитающими учить их, что $7 \cdot 8 = 8 \cdot 7$.

Автор не думал, что его речь в пользу сохранения обучения математике нужна в России, где с ним и так все согласны, пока не прочел в *Известиях* (№101, “Наука”, 17.06.2005, с.16), будто “математика, в отличие от других наук, не имеет дела с привычным миром”.

Поэтому теперь этот (первоначально предназначавшийся для малограмотных французских коллег) текст предлагается российскому читателю (имея в виду скорее читателя, интересующегося привычным миром естественных наук, чем математических снобов).