Вокруг математики

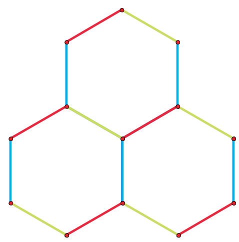
ДВУКВАДРАТНЫЕ ЧИСЛА

Предисловие

Георгий Борисович ШАБАТ
профессор Института лингвистики
Российского государственного
гуманитарного университета
george.shabat@gmail.com

Весной 2009 года я проводил еженедельные домашние занятия с небольшой группой пятиклассниц и одним третьеклассником (двое из участников – мои внуки). Это называлось *Малый КЭМ* (**К**луб **Э**кспериментальной **М**атематики). Предлагаемая статья – продукт наших занятий. Тексты написаны детьми (с умеренным участием взрослых) на основе их докладов на семинаре А.И. Сгибнева в МЦНМО 19 мая 2009 г.

Мы ничего не доказывали и почти ничего не пытались объяснить. Мы учились наблюдать, подмечать закономерности и радоваться их проявлениям.

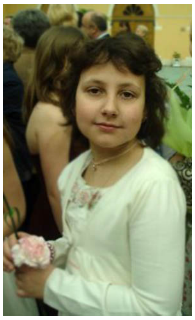


Эмблема КЭМа

В процессе работы участники овладели компьютерными программами «Живая Геометрия» и MAPLE и активно их использовали.

Я признателен своим детям – М.Г. Шабат, придумавшей и организовавшей эти занятия, и В.Г. Шабату, помогавшему в работе. Техника работы с «косыми квадратами» перенята мной у А.К. Звонкина, которому я признателен и за эту технику, и за некоторые заимствованные у него навыки работы с детьми.

Таблица двуквадратных чисел и наблюдения



Лиза Лепихова
участница Клуба экспериментальной математики

0. Определения

0.0. Все числа – натуральные: 0,1,2, ...

0.1. *Двуквадратное* число – это число, которое равно сумме двух квадратов.

0.2. *Двувидово-двуквадратное* число – это двуквадратное число, которое можно выразить как сумму двух квадратов двумя *по-настоящему* разными способами – то есть не просто переставив слагаемые. Например, $25 = 0^2 + 5^2 = 3^2 + 4^2$.

1. Таблица двуквадратных чисел от 1 до 150

Представление в виде 4n + 1	Число	Разложение на простые	Представление в виде $a^2 + b^2$
исключение	**2**	–	1·1 + 1·1
–	4	2·2	2·2 + 0·0
4·1 + 1	**5**	–	2·2 + 1·1
–	8	2·2·2	2·2 + 2·2
–	9	3·3	3·3 + 0·0
–	10	2·5	3·3 + 1·1
4·3 +1	**13**	–	3·3 + 2·2
–	16	2·2·2·2	4·4 + 0·0
4·4 +1	**17**	–	4·4 + 1·1
–	18	2·3·3	3·3 + 3·3
–	20	2·2·5	4·4 + 2·2
–	25	5·5	5·5 + 0·0 = 4·4 + 3·3
–	26	2·13	5·5 + 1·1
4·7 + 1	**29**	–	2·2 +5·5
–	32	2·2·2·2·2	4·4 + 4·4
–	34	2·17	5·5 + 3·3

–	36	2·2·3·3	6·6 + 0·0
–	**37**	–	6·6 + 1·1
–	40	2·2·2·5	6·6 + 2·2
4·10 + 1	**41**	–	5·5 + 4·4
–	45	3·3·5	6·6 + 3·3
–	50	2·2·5	5·5 + 5·5 = 7·7 + 1·1
–	52	2·2·13	6·6 + 4·4
–	58	2·29	7·7 + 3·3
4·15 + 1	**61**	–	6·6 + 5·5
–	65	5·13	8·8 + 1·1 = 4·4 + 7·7
–	68	2·2·17	8·8 + 2·2
–	72	2·2·2·3·3	6·6 + 6·6
4·18 +1	**73**	–	8·8 + 3·3
–	74	2·37	7·7 + 5·5
–	80	2·2·2·2·5	8·8 + 4·4
–	82	2·3·13	9·9 + 1·1
–	85	5·17	7·7+ 6·6 = 9·9 + 2·2
4·22 +1	**89**	–	8·8 + 5·5
–	90	2·3·3·5	9·9 + 3·3
4·24 +1	**97**	–	9·9 + 4·4
–	98	2·7·7	7·7 + 7·7
–	100	2·2·5·5	8·8 + 6·6 = 10·10 + 0·0
–	104	2·2·2·13	10·10 + 2·2
–	106	2·53	9·9 + 5·5
4·27 + 1	**109**	–	10·10 + 3·3
4·28 + 1	**113**	–	8·8 + 7·7
–	116	2·2·29	10·10 + 4·4
–	117	3·3·13	9·9 + 6·6
–	121	11·11	11·11 + 0·0
–	122	2·61	11·11 + 1·1
–	125	5·5·5	10·10 + 5·5
–	128	2·2·2·2·2·2·2	8·8 + 8·8
–	130	2·5·13	9·9 + 7·7
–	136	2·2·2·17	10·10 + 6·6

4·34 + 1	**137**	–	11·11 + 4·4
–	144	2·2·2·2·3·3	12·12 + 0·0
–	145	5·29	12·12 + 1·1
–	146	2·73	11·11 +5·5
–	148	2·2·37	12·12 +2·2
4·37 + 1	**149**	–	10·10 + 7·7

2. Наблюдения

2.1. Среди двуквадратных чисел есть *простые*. (Они выделены жирным шрифтом зелёного цвета.) Все простые двуквадратные числа (кроме 2) в таблице при делении на 4 дают остаток 1.

2.2. Произведения двуквадратных чисел двуквадратны. Это объясняется *волшебной формулой* – см. презентацию Антона (с. 61 этого номера журнала).

2.3. Двувидово-двуквадратные числа (в таблице они выделены красным) имеют общее свойство: это произведения двух простых нечётных двуквадратных чисел. Кроме 50, и об этом числе надо ещё подумать. Я проверила это правило на MAPLE и для других чисел, не вошедших в таблицу.

Оказывается, например, что

$$13 \cdot 17 = 221 = 14^2 + 5^2 = 11^2 + 10^2,$$

а

$$41 \cdot 61 = 2501 = 50^2 + 1^2 = 49^2 + 10^2.$$

Правило продолжает работать!

Последние числа находятся с помощью такой программы на MAPLE:

```
for x from 0 to 200 do
  for y from 0 to 200 do
    if x^2 + y^2 = 2501
      then print(x, y) end if
  end do
end do
```

MAPLE отвечает:

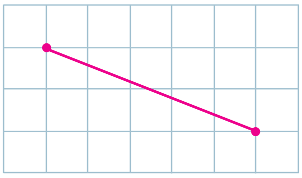
1, 50
10, 49
49, 10
50, 1

Площади косых квадратов и двуквадратные числа

Нина Шиндовски
участница Клуба экспериментальной математики

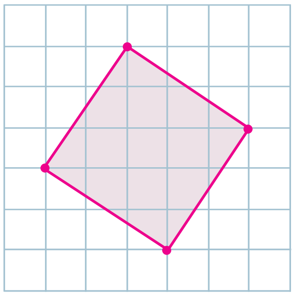
0. Определения

0.0. Вот *косой отрезок*:



Он строится так: «5 клеточек вправо, 2 вниз». Можно ещё сказать, что это – отрезок *типа* (5, −2).

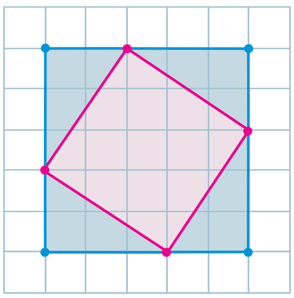
0.1. Косым квадратом мы называем квадрат, стороны которого – косые отрезки. Например:



Это – квадрат типа (3, 2). Его стороны – косые отрезки типов (3, −2), (−2, −3), (−3, 2) и (2, 3).

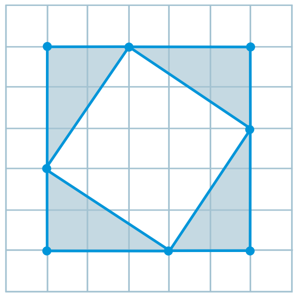
1. Как считать площади косых квадратов

Я объясню это на примере только что нарисованного квадрата. Сначала я вписываю его в прямой квадрат:

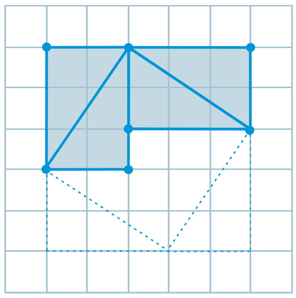


Площадь большого квадрата равна $5 \times 5 = 25$ клеточек.

Теперь вырезаю серединку:



А теперь представляю себе, что противоположные уголки подъехали друг к другу:

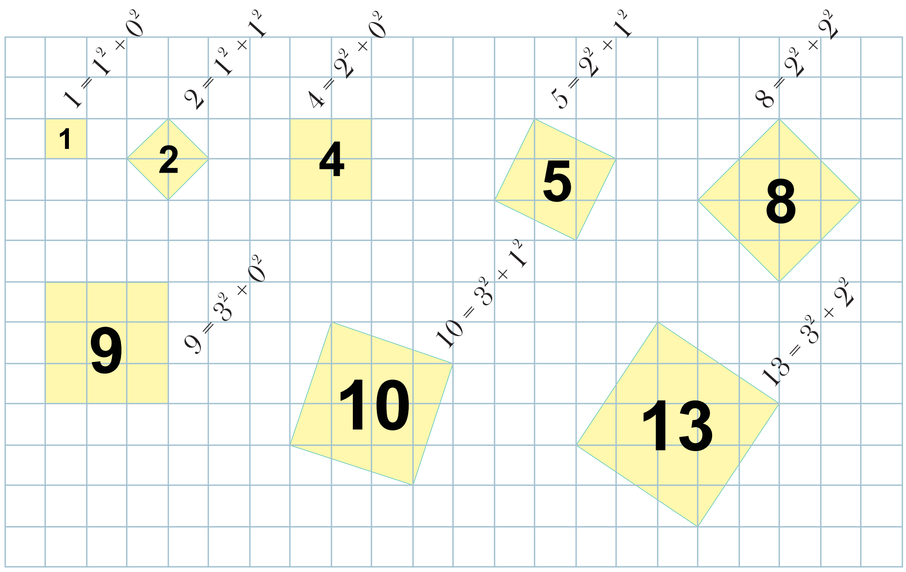


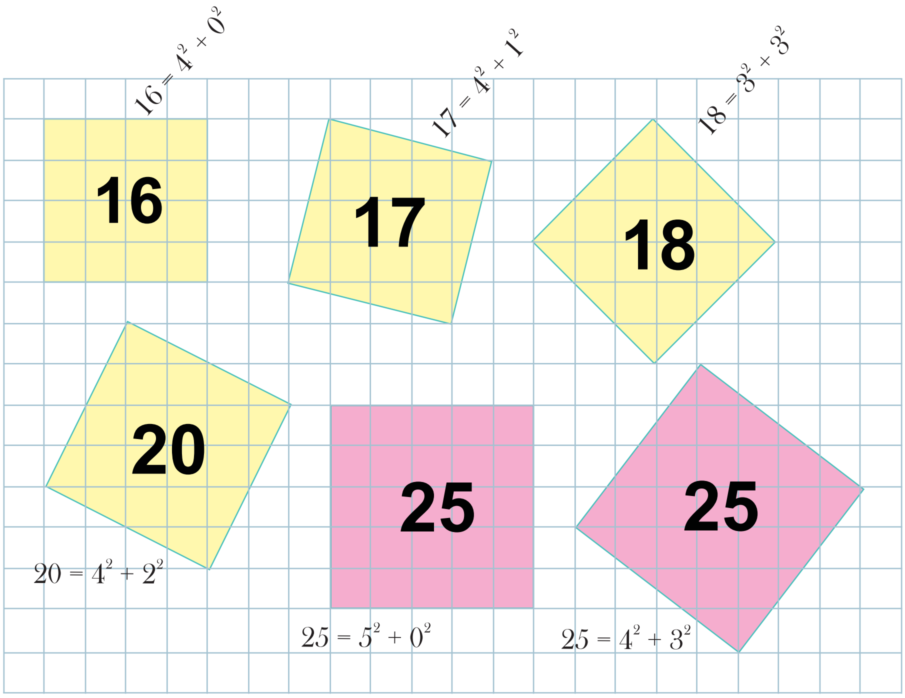
Теперь я вижу, что в каждой паре соединившихся уголков по $2 \times 3 = 6$ клеточек. Значит, вся площадь уголков равна $6 + 6 = 12$ уголков.

А площадь косого красного квадрата равна площади прямого синего, уменьшенной на площадь уголков, то есть $25 - 12 = 13$ клеточек.

Таким же способом я посчитала площади всех косых квадратов от 1 до 25.

2. Список косых квадратов и их площадей





3. Наблюдения

Если сравнить мои площади с числами из Лизиной таблицы, то видно, что:

3.1. Все площади косых квадратов – двуквадратные числа.

3.2. И наоборот, все двуквадратные числа – площади косых квадратов.

Это не случайно. Можно заметить, что:

3.3. Площадь косого квадрата типа (a, b) равна $a^2 + b^2$.

И последнее наблюдение.

3.4. Квадрат с двувидово-двуквадратной площадью (например, 25) можно уложить на клетчатую бумагу двумя разными способами.

Волшебная формула и super13

Антон Шабат
участник Клуба экспериментальной математики

Введение (***Г.Б. Шабат***)

Работа Антона требует некоторых объяснений.

Когда был освоен MAPLE, нам захотелось поработать с большими двуквадратными числами. Мы уже знали достаточно, чтобы сразу определять, двуквадратно ли, скажем, некоторое 20-значное число: MAPLE быстро раскладывает его на простые множители и, глядя только на последние две цифры этих множителей, мы сразу определяли их остатки от деления на 4.

Мы стали испытывать разные большие числа. Чего мы только не пробовали! Писали наши телефоны и телефоны наших родственников и знакомых, приписывали эти телефоны друг к другу, выписывали свои даты рождения и даты рождения наших мам, зажмуривались и по очереди набирали случайные цифры... Ничего не получалось!

Точнее, обычно получалось вот что. Наши большие числа оказывались составными[1]. Они разлагались в произведения степеней двойки и нескольких нечётных простых, из которых хотя бы одно оканчивалось на 03, 07, 11, ..., 91, 99, т.е. давало остаток 3 при делении на 4.

Это казалось цепочкой неудач, особенно с учётом усиленной формы теоремы Дирихле о простых в арифметических прогрессиях (дети, кажется, поняли её формулировку): *простых чисел вида* $4n+1$, *меньших данного (большого) числа,* ***примерно*** *столько же, сколько простых чисел вида* $4n+3$. Но когда наши простые возникали как группки простых множителей случайного большого числа, множители видов $4n+1$ и $4n+3$ почему-то всё время перемешивались!

Только после занятия, продумывая его с «взрослой» точки зрения, я понял, что ничего удивительного не происходило. Во-первых, почему нам не попадались простые числа? Согласно закону ...Гаусса – Чебышёва – ...Адамара – Валле-Пуссена, количество простых чисел, не превосходящих x, приближённо равно $\frac{x}{\ln x}$. Иначе говоря, *вероятность* того, что наугад взятое число от 2 до x окажется простым, обратно пропорциональна количеству знаков x и приближённо равна $\frac{1}{\ln x}$. В пределах наших экспериментов, скажем, при $x = 10^{20}$, это даёт $\frac{1}{20\ln 10} = 0{,}021714...$, т.е. около 2%.

Во-вторых, почему не попадались двуквадратные числа? Согласно гораздо менее известному факту, независимо обнаруженному Э. Ландау и С. Рамануджаном[2], количество двуквадратных чисел, не превосходящих x, приближённо равно $\frac{Kx}{\sqrt{\ln x}}$, где $K = 0{,}764...$ – константа Ландау-Рамануджана (в современном Интернете можно найти тысячи её знаков). Иначе говоря, *вероятность* того, что наугад взятое число от 0 до x окажется двуквадратным, обратно пропорциональна корню из количества знаков x и приближённо равна $\frac{0{,}764}{\sqrt{\ln x}}$. Для $x = 10^{20}$ это даёт $\frac{0{,}764}{\sqrt{20\ln 10}} = 0{,}112...$, т.е. около 11%.

Отчаявшись найти большое двуквадратное число случайно, мы стали набирать цифры подряд: 1, 12, 123, ... Дойдя до 10, стали набирать 101112... . За исключением 1234, двуквадратных среди этих чисел тоже не попадалось. И лишь при 123...1213 нам улыбнулась удача; ей и посвящён доклад Антона.

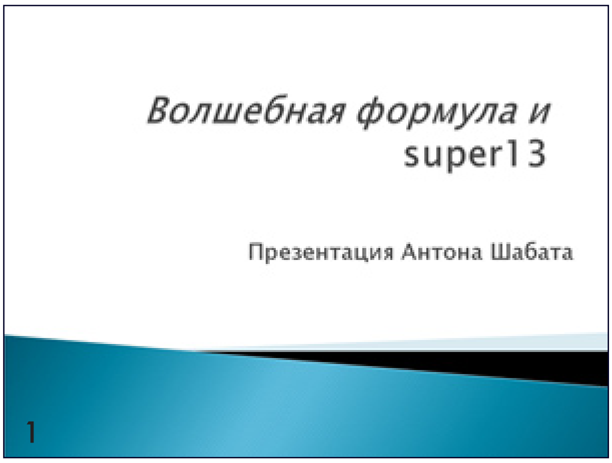
[1] Уже на докладе Антона в аудитории нашёлся (единственный) слушатель, чей десятизначный номер телефона был простым.

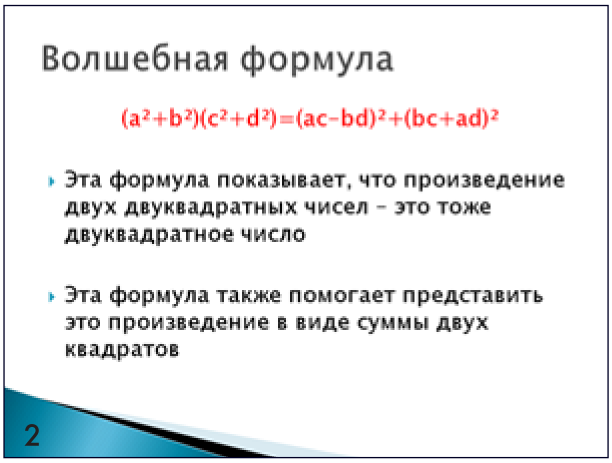
[2] См., например: *Shiu P.* Counting sums of Two squares: The Meissel-Lehmer Method // Mathematics of Computation. 1986. Vol. 47. № 175. P. 351–360. (http://www.jstor.org/pss/2008100).

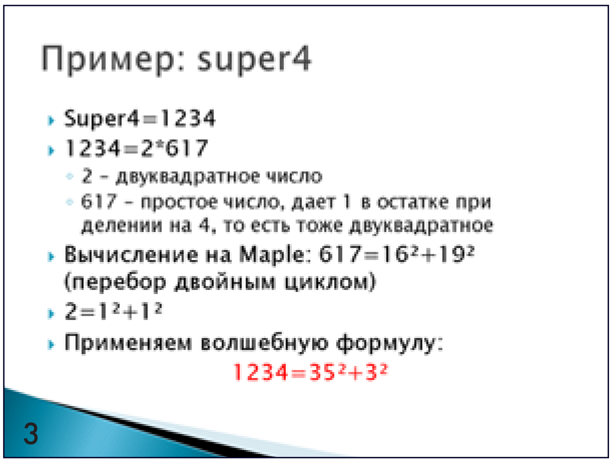
Мы назвали эти числа по следующему принципу: 123 = super3 и т.д. На детей произвело впечатление то, что двуквадратность числа super13 была обнаружена 13 апреля. Мы не знаем, каково следующее двуквадратное число (и существует ли оно, и если да, доступно ли современным персональным компьютерам).

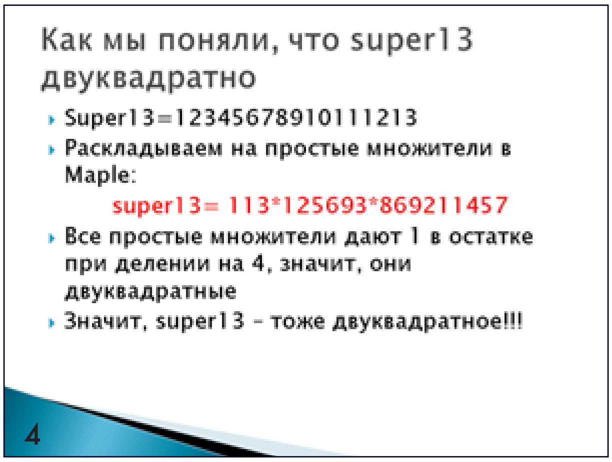
Я надеюсь, что из рассказанной истории видно, насколько условны границы между «детской» и «взрослой» математикой.

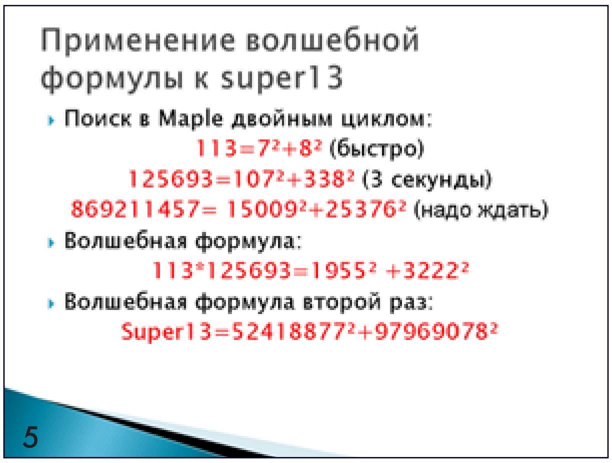
Работа Антона приводится в форме приготовленной им презентации доклада.











Заключение. Над чем думать дальше

• Что из того, что мы узнали, мы умеем объяснить?

• Что из того, что мы узнали, мы *не* умеем объяснять?

• Как строить трёхвидово-двуквадратные числа? А также четырёхвидово-двуквадратные, и вообще, многовидово-двуквадратные числа?

• Сколькими способами квадрат с многовидовой площадью кладётся на лист клетчатой бумаги?

• Есть ли двуквадратные числа среди *super*14, *super*15, ...? Вообще, какие ещё интересные двуквадратные числа можно придумать?

• Пусть дано разложение числа на простые множители. Как определить, двуквадратно ли оно? Более общий вопрос: сколькими способами (0 или больше...) его можно представить в виде суммы двух квадратов?

• Можно ли построить похожую теорию *трёхквадратных* чисел?

• Можно ли построить похожую теорию *двутреугольных* чисел?

Вернуться к содержанию