Последняя цифра простого числа

Научный руководитель Г.Б. Шабат

Огромное спасибо Ю.В. Матиясевичу, П.В. Киму, Г.А. Мерзону О.В. Карасева

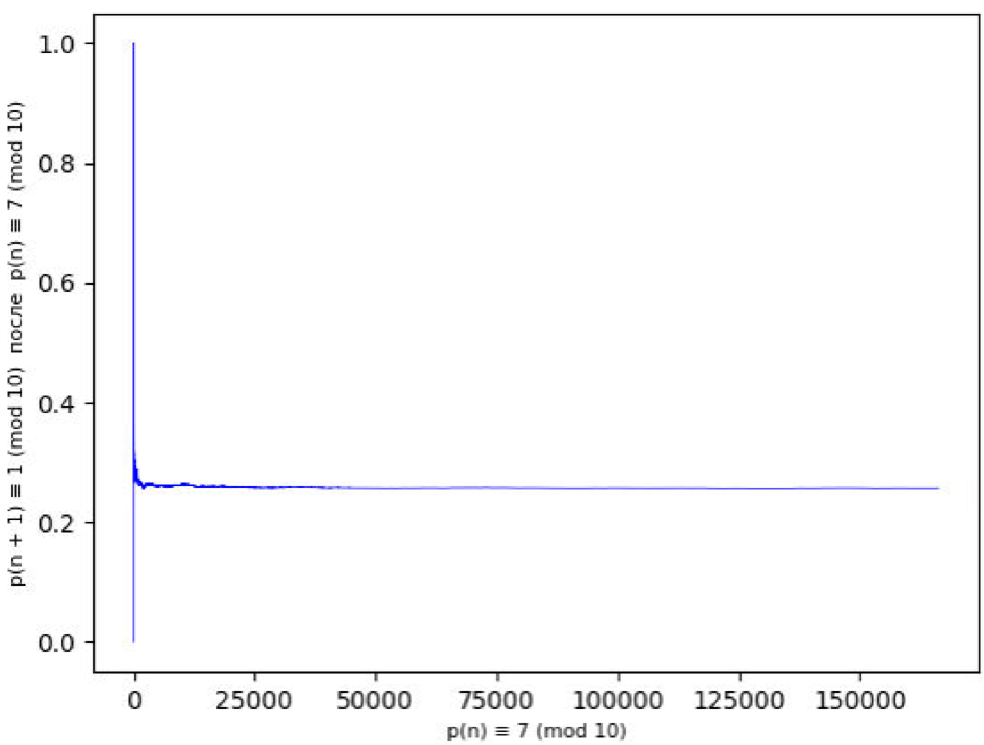
В тексте с точки зрения вероятности обсуждается вопрос о том, каким по некоторому модулю и с какой вероятностью может быть следующее простое число в зависимости от предыдущего. Ниже представлены исключительно экспериментальные данные в таблицах и графиках. Замечено несколько закономерностей, но общая картина пока неясна и остается много открытых (для авторов) вопросов.

Обозначим за $p(n)$ n-ое простое число и рассмотрим цифру, на которое оно оканчивается в десятичной системе счисления. По компьютерным экспериментам вероятности заканчиваться на 1, 3, 7, 9 приблизительно равны.

Задача, предложенная Ю.В. Матиясевичем.

Если $p(n)$ заканчивается на цифру x, то какова вероятность, что $p(n+1)$ заканчивается на y?

График. *Рассмотрим для примера $x = 7$ и $y = 1$. Построим следующий график: по оси абсцисс отложим количество встретившихся $p(n)$, оканчивающихся на x. По оси ординат – отношение $p(n+1)$, оканчивающихся на y, к общему числу $p(n+1)$. Оказывается, что при проверке чисел в пределах 10^7 график похож на участок прямой, параллельной оси абсцисс и пересекающий ось ординат примерно в точке* $(0; 0.26)$.



Для других пар (x, y) график качественно выходит примерно такой же. Иногда вначале может быть отклонение: как и «вверх», так и «вниз» от прямой. Исходя из этого примера, можно предположить, что предел для рассматриваемой условной вероятности действительно существует, и мы можем ввести обозначение.

Определение. $M_k(x, y) = \mathbb{P}\Big(\text{"}p(n+1) \equiv y \pmod{k}\text{"}\Big|\text{"}p(n) \equiv x \pmod{k}\text{"}\Big)$, *где $p(n)$ – n-ое простое число.*

Результаты эксперимента представлены в таблице 1 ниже. Заметим, что вероятность того, что $p(n+1)$ будет заканчиваться на такую же цифру, что $p(n)$, минимальна среди других вероятнотей. И вероятности в целом довольно сильно различаются.

Таблица 1. $M_{10}(x, y)$ *при проверке чисел до* 10^7.

x/y	1	3	7	9
1	$\frac{28312}{166103} \approx 0.17045$	$\frac{51623}{166103} \approx 0.31079$	$\frac{53322}{166103} \approx 0.32102$	$\frac{32846}{166103} \approx 0.19774$
3	$\frac{38496}{166230} \approx 0.23158$	$\frac{25929}{166230} \approx 0.15598$	$\frac{48656}{166230} \approx 0.29270$	$\frac{53148}{166230} \approx 0.31973$
7	$\frac{42641}{166211} \approx 0.25655$	$\frac{45785}{166211} \approx 0.27546$	$\frac{25926}{166211} \approx 0.15598$	$\frac{51859}{166211} \approx 0.31201$
9	$\frac{56655}{166032} \approx 0.34123$	$\frac{42892}{166032} \approx 0.25834$	$\frac{38306}{166032} \approx 0.23071$	$\frac{28179}{166032} \approx 0.16972$

Также мы можем рассматривать простые числа по другим модулям, как в таблицах 2, 3 и 4.

x/y	1	2
1	0.43020	0.56980
2	0.56947	0.43052

Таблица 2. $M_3(x, y)$.

$M_3(1,1) \approx M_3(2,2)$
$M_3(1,2) \approx M_3(2,1)$

x/y	1	3
1	0.43495	0.56505
3	0.56468	0.43531

Таблица 3. $M_4(x, y)$.

$M_4(1,1) \approx M_4(3,3)$
$M_4(1,3) \approx M_4(3,1)$

x/y	1	2	3	4	5	6
1	0.089	0.146	0.205	0.181	0.208	0.171
2	0.232	0.089	0.126	0.198	0.146	0.209
3	0.148	0.257	0.084	0.132	0.199	0.180
4	0.198	0.155	0.228	0.083	0.128	0.208
5	0.147	0.207	0.155	0.257	0.089	0.145
6	0.185	0.147	0.201	0.148	0.231	0.087

Таблица 4. $M_7(x, y)$.

Как мы видим, относительно побочной диагонали таблицы наблюдается «симметрия»! А также в главной диагонали таблицы числа очень похожи при рассмотрении по простому модулю.

Мы сейчас рассматривали вопрос для всех простых чисел. А что будет, если, например, рассматривать только простые числа вида $t^2 + 1$, где $t \in \mathbb{Z}$?

Определение. $M_k(x, y, P(t)) = \mathbb{P}\Big(\text{"}p_{P(t)}(n+1) \equiv y \pmod{k}\text{"}\Big|\text{"}p_{P(t)}(n) \equiv x \pmod{k}\text{"}\Big)$, *где* $p_{P(t)}(n)$ *– n-ое простое число вида* $P(t)$, *где* $t \in \mathbb{Z}$.

x/y	1	7
1	0.27856	0.72144
7	0.36037	0.63963

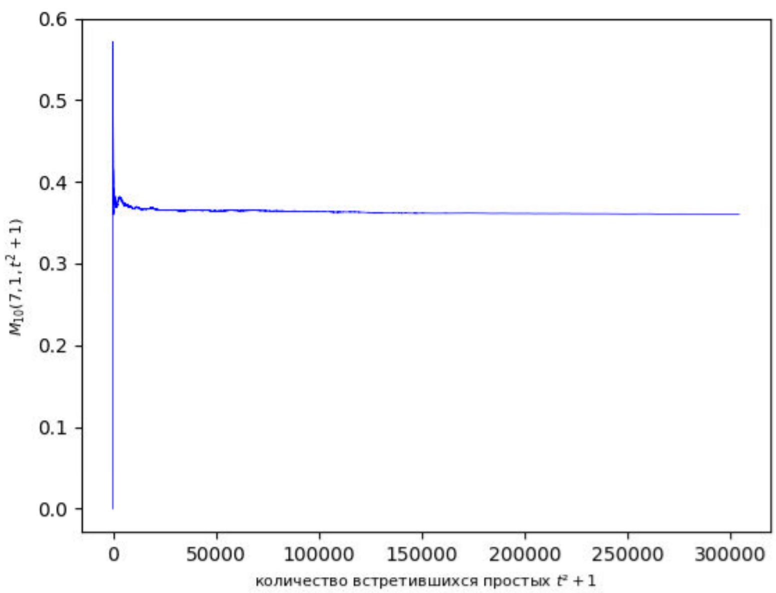
Таблица 5. $M_{10}(x, y, t^2 + 1)$.

x/y	1	2
1	0.28022	0.71978
2	0.35904	0.64096

Таблица 6. $M_3(x, y, t^2 + 1)$.

x/y	1	2	3	5
1	0.09622	0.29142	0.33521	0.27715
2	0.14712	0.23375	0.30400	0.31512
3	0.16881	0.30369	0.24383	0.28367
5	0.13641	0.31543	0.28378	0.26438

Таблица 7. $M_7(x, y, t^2 + 1)$.



$\#\{p_{t^2+1}(n) \mid p_{t^2+1}(n) \equiv 1 \pmod{10},\ t \leq 10^7\} = 152019$. $\#\{p_{t^2+1}(n) \mid p_{t^2+1}(n) \equiv 7 \pmod{10},\ t \leq 10^7\} = 304340$. Мы наблюдаем отличие практически ровно в 2 раза. При этом $M_{10}(1, 7, t^2+1) \approx 2 \cdot M_{10}(7, 1, t^2+1)$. Аналогичная закономерность с почти такими же числами внутри таблицы при $M_{10}(x, y, t^2+4)$ и $M_3(x, y, t^2+1)$. К таблице 7: на 1 заканчиваются: 65246 простых чисел вида t^2+1, на 2: 130219, на 3: 130290, на 5: 130606.

Хотелось бы узнать, как связаны $\left.\dfrac{\#\{p_{t^2+1}(n) \mid p_{t^2+1}(n) \equiv x \pmod{k},\ t \leq M\}}{\#\{p_{t^2+1}(n) \mid p_{t^2+1}(n) \equiv y \pmod{k},\ t \leq M\}}\right|_{M\to\infty}$ и $\dfrac{M_k(y, x, t^2+1)}{M_k(x, y, t^2+1)}$, размер таблицы и числа в ней, от чего зависит $M_k(x, x, P(t))$ и так далее ...

Литература: Ж.-П. Серр, «Курс арифметики».