Фадеев Никита

Растяжение треугольника на координатной плоскости

Центр треугольника на координатной плоскости.

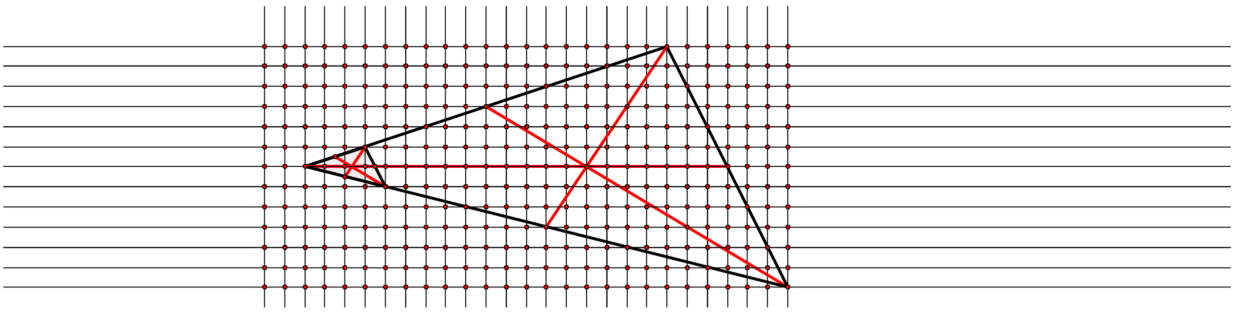
1)Сначала передо мной стояла следующая задача: треугольник лежит на координатной плоскости так, что его вершины имеют целые координаты. Когда центр треугольника также будет иметь целые координаты?
Центр треугольника с целыми вершинами - целый, когда разности между абсциссами всех вершин и разности между ординатами всех вершин делятся на 3.

2)Дальше на координатной плоскости был дан произвольный треугольник с целочисленными координатами вершин. Во сколько раз надо его увеличить, чтобы его центр и середины сторон имели целые координаты?
Если увеличить любой треугольник в 6 раз, его центр и середины сторон в любом случае будут целыми.

Доказательство:

Если мы увеличим треугольник в 3 раза, координаты всех его вершин будут делиться на 3, значит, их разность тоже будет делиться на 3. Получается, центр треугольника будет целым. Если мы увеличим треугольник ещё в 2 раза, координаты всех его вершин будут делиться на 2, значит, их разность тоже будет делиться на 2, и, поэтому середины сторон треугольника будут целыми.

Пример:

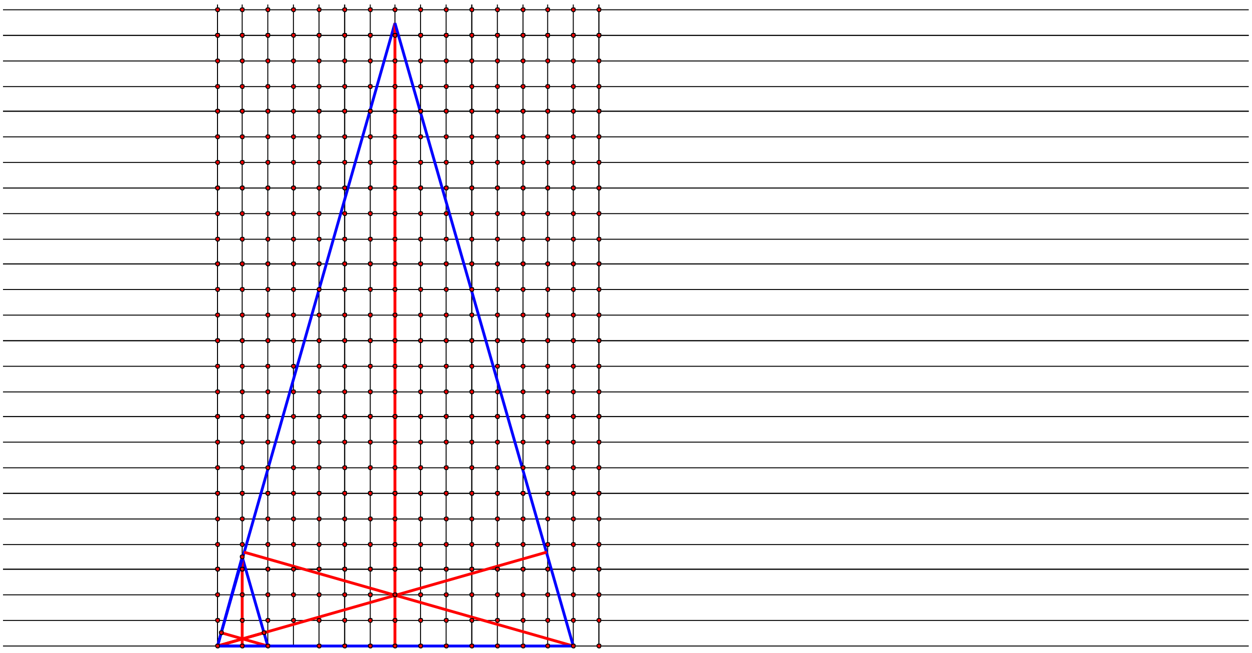


Ортоцентр треугольника на координатной плоскости

0) Передо мной была поставлена **задача**: найти, во сколько раз надо растянуть треугольник на координатной плоскости, чтобы его ортоцентр и точки пересечения его высот со сторонами были целочисленными. Я поставил эксперимент и решил задачу для её частного случая: равнобедренного треугольника с координатами вершин (-1;0), (1;0) и (0;m), где m-рациональное число.

1) Целочисленный ортоцентр. *Для того, чтобы ортоцентр треугольника, лежащего на координатной плоскости, с координатами вершин* (-1;0), (1;0) и (0;*m) стал целым, этот треугольник надо увеличить в km раз, где k-знаменатель несократимого представления m.*

Приведу пример для треугольника с m=3,5:



Определение: *Уравнение прямой* – это уравнение типа $ax+by+c=0$, задающее координаты ($x;y$) всех точек этой прямой.

2) Целочисленное основание одной из высот.

Для любого треугольника, лежащего на координатной плоскости, с координатами вершин (-1;0), (1;0) и (0;m) верно то, что, если такой треугольник увеличить в $((1+x)m^2+1+x)/2$ раза, где x такое, что m+mx-целое число, точка пересечения этой высоты(назовем ее CD) с противоположной стороной(назовем ее AB) будет целой.

Доказательство:

Составим уравнение прямой, на которой лежит AB и прямой, на которой лежит CD. Получатся такие уравнения: y-m-mx=0 и 1-x-my=0. При увеличении треугольника меняется только один важный для расположения точки D: координаты точки C. Они определяются только абсциссой, потому что точка C движется по оси абсцисс. Нам надо подобрать такую абсциссу точки C, чтобы x и y были целыми. Назовем абсциссу точки C x_1. Запишем систему уравнений, где x_1 - параметр.

x_1-x-my=0

y-m-mx=0

y=m+mx

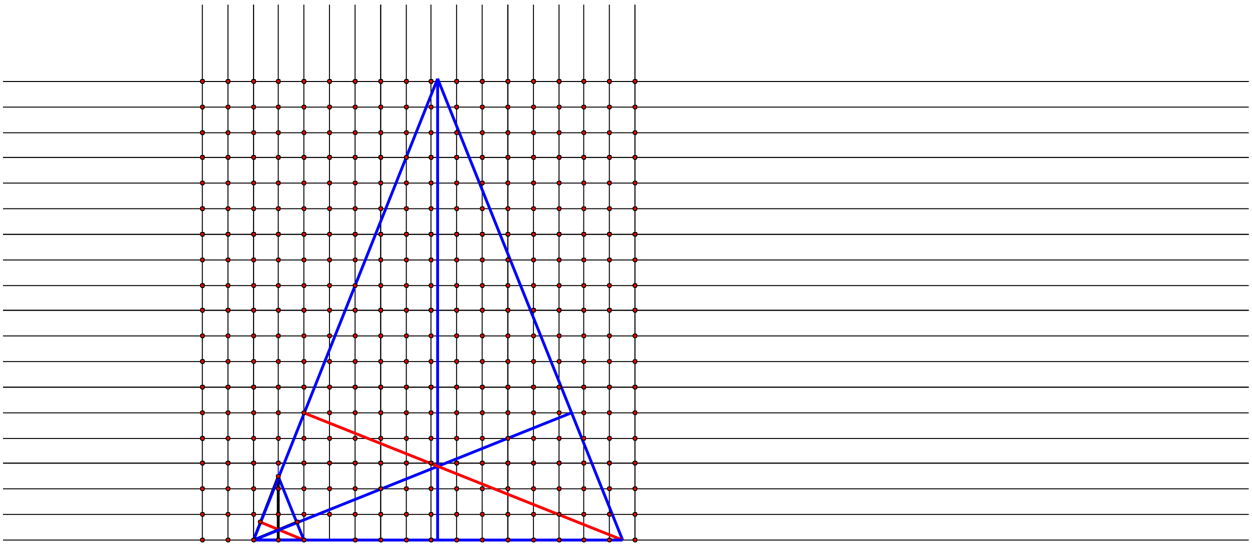
-m*m(1+x)-x+x_1=0

$-m^2-m^2x-x+ x_1=0$

$x_1=m^2+m^2x+x$

Значит, длина основания у этого треугольника равна m^2+m^2x+x+1. Так как изначально длина основания была равна 2, треугольник надо увеличить в $((1+x)m^2+1+x)/2$ раз, чтобы точка пересечения этой высоты с противоположной стороной будет целой. 1+x, собственно, равно k, значит, $((1+x)m^2+1+x)/2=(km^2+k)/2$.

Приведу пример для треугольника с m=2,5:



3) Целочисленное основание второй высоты.

Для любого треугольника, лежащего на координатной плоскости, с координатами вершин (-1;0), (1;0) и (0;m) верно то, что, если такой треугольник увеличить в (mk+k/m)2 раз, где k-знаменатель несократимого представления m, точка пересечения высоты этого треугольника со стороной BC будет целой.

Доказательство:

Составим уравнение прямой, на которой лежит BC и прямой, на которой лежит эта высота. Получатся такие уравнения: my-x-1=0 и mx+y+c=0. При увеличении треугольника меняется только один важный для расположения точки D: координаты точки C. Они определяются только абсциссой, потому что точка C движется по оси абсцисс. Нам надо подобрать такую абсциссу точки C, чтобы x и y были целыми. Абсцисса точки C задается c. Запишем систему уравнений, где c - параметр.

My-x-1=0

Mx+y+c=0

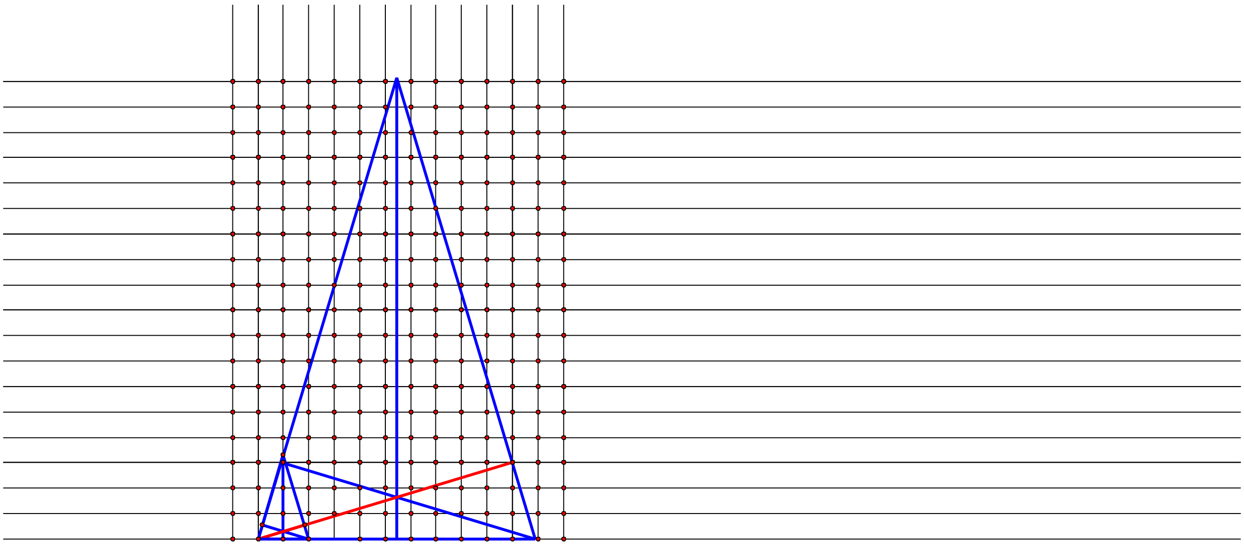
X=my-1

M(my-1)+y+c=0

C=m-m^{2}y-y

Чтобы x был целым, надо чтобы y делился на k. Поэтому можно принять y за k. Чтобы узнать абсциссу точки C, надо поменять знак c и разделить получившееся число на m. Получится: mk+k/m-1. Значит, длина основания у этого треугольника равна mk+k/m. Так как изначально длина основания была равна 2, треугольник надо увеличить в (mk+k/m)2 раз, чтобы точка пересечения этой высоты с противоположной стороной будет целой.

Приведу пример для треугольника с m=3+1/3:



Вывод:

Итак, значит, треугольник, лежащий на координатной плоскости, с координатами вершин (-1;0), (1;0) и (0;m) надо увеличить в $2m^2k^2((mk+k/m)2)$ раз, чтобы его ортоцентр и точки пересечения его высот со сторонами были целыми, потому что это число всегда делится на $(km^2+k)/2$:

$2m^2k^2((mk+k/m)2)=mk(m^2k^2+k^2) =2mk^2(km^2+k)/2$.