2015.05.28/

Фадеев Никита

Растяжение треугольника на координатной плоскости

Содержание

1. Центр треугольника на координатной плоскости.

1.1. Сначала передо мной стояла следующая задача:

треугольник лежит на координатной плоскости так, что его вершины имеют целые координаты. *Когда центр треугольника также будет иметь целые координаты*?

Ответ: *Центр треугольника с целыми вершинами - целый тогда и только тогда, когда разности между абсциссами всех вершин и разности между ординатами всех вершин делятся на* 3.

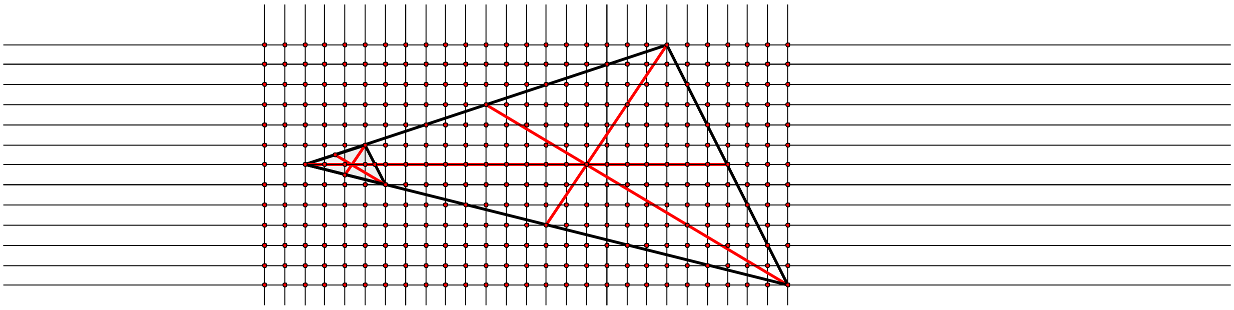
1.2. Дальше на координатной плоскости был дан произвольный треугольник с целочисленными координатами вершин.

Во сколько раз надо его увеличить, чтобы его центр и середины сторон имели целые координаты?

Ответ: *Если увеличить любой треугольник в 6 раз, его центр и середины сторон будут целыми.*

Доказательство: Если мы увеличим треугольник в 3 раза, координаты всех его вершин будут делиться на 3, значит, их разность тоже будет делиться на 3. Получается, центр треугольника будет целым. Если мы увеличим треугольник ещё в 2 раза, координаты всех его вершин будут делиться на 2, значит, их разность тоже будет делиться на 2, и, поэтому середины сторон треугольника будут целыми.

Пример:



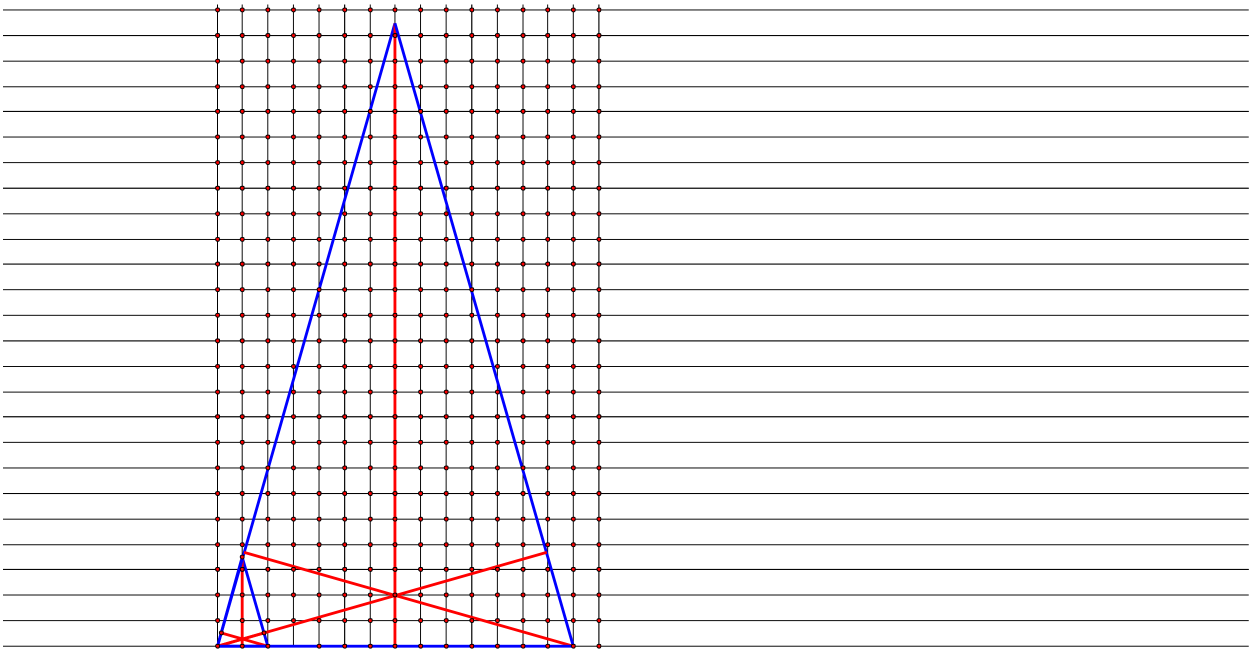
2. Ортоцентр треугольника на координатной плоскости

2.0. Передо мной была поставлена **задача**:

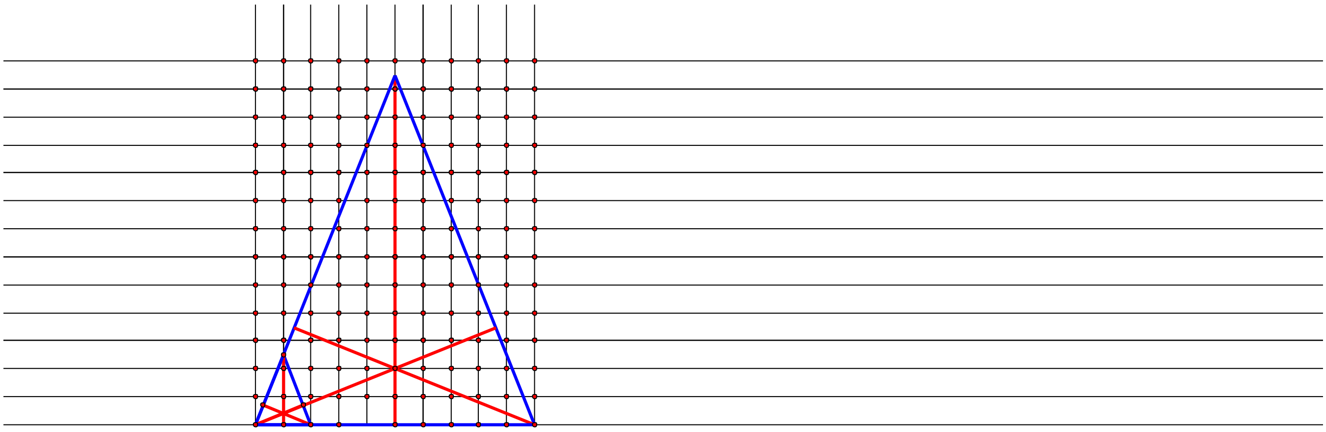
найти, во сколько раз надо растянуть треугольник на координатной плоскости, чтобы его ортоцентр и основания его высот были целочисленными.
Я поставил эксперимент и решил задачу для её частного случая: равнобедренного треугольника с координатами вершин (-1;0), (1;0) и (0;p/q), где p/q-рациональное число.

2.1. Целочисленный ортоцентр. *Для того, чтобы ортоцентр треугольника, лежащего на координатной плоскости, с координатами вершин* (-1;0), (1;0) и (0;*p/q) стал целым, этот треугольник надо увеличить в p раз.*

Приведу пример для треугольника с p/q=7/2:



И для p/q=5/2:



Определение: *Уравнение прямой* – это уравнение типа $ax+by+c=0$, задающее координаты $(x;y)$ всех точек этой прямой.

2.2. Целочисленное основание одной из высот.

Для любого треугольника с координатами вершин (-1;0), (1;0) и (0;p/q) верно, что, если такой треугольник увеличить в $(q(p/q)^2+q)/2$ раза,, точка пересечения этой высоты(назовем ее CD) с противоположной стороной(назовем ее AB) будет целой.

Доказательство: Составим уравнение прямой, на которой лежит AB и прямой, на которой лежит CD. Получатся такие уравнения: $y-(p/q)-(p/q)x=0$ и $1-x-(p/q)y=0$. При увеличении треугольника меняется только один важный для расположения точки D: координаты точки C. Они определяются только абсциссой, потому что точка C движется по оси абсцисс. Нам надо подобрать такую абсциссу точки C, чтобы x и y были целыми. Назовем абсциссу точки C x_1. Запишем систему уравнений, где x_1 - параметр.

$x_1-x-(p/q)y=0$

$y-(p/q)-(p/q)x=0$

$y=(p/q)+ (p/q)x$

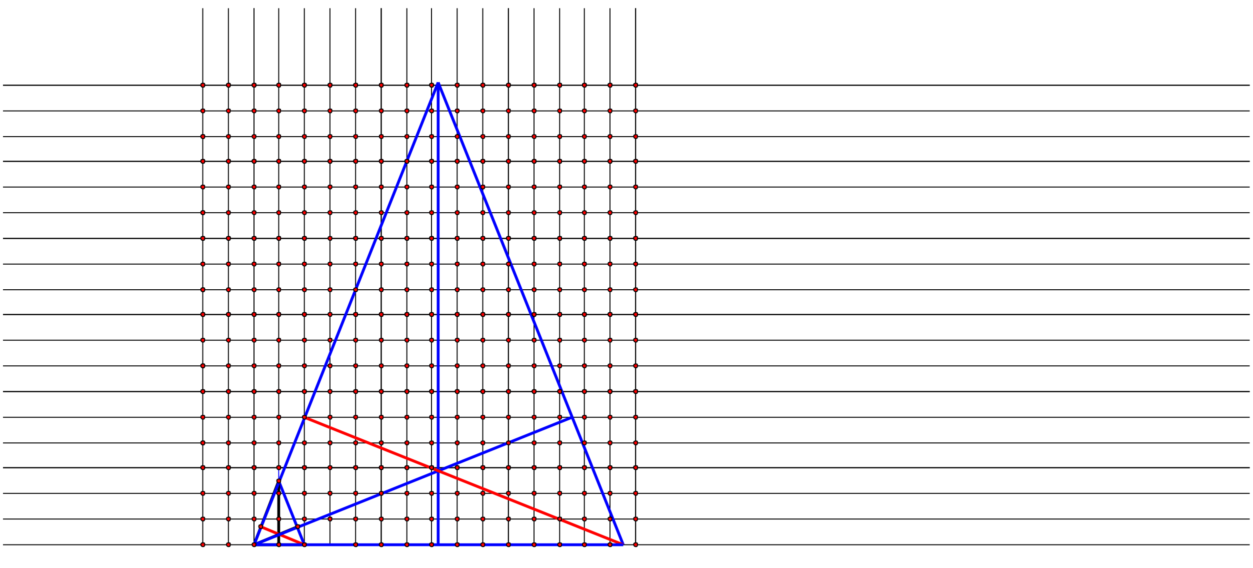
$-(p/q)* (p/q) (1+x)-x+x_1=0$

$-(p/q)^2-(p/q)^2x-x+ x_1=0$

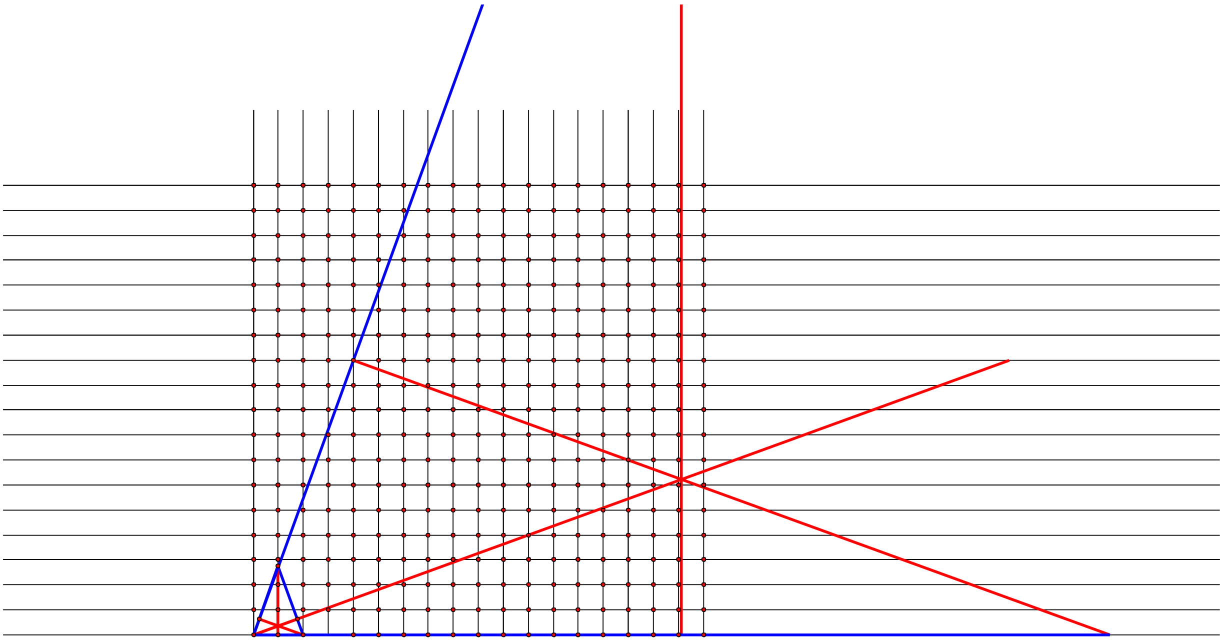
$x_1=(p/q)^2+(p/q)^2x+x$

Значит, длина основания у этого треугольника равна $(p/q)^2+(p/q)^2x+x+1$. Так как изначально длина основания была равна 2, треугольник надо увеличить в $((1+x)(p/q)^2+1+x)/2$ раз, чтобы точка пересечения этой высоты с противоположной стороной будет целой. 1+x, собственно, равно q, значит, $((1+x)p/q^2+1+x)/2=(p^2/q+q)/2$.

Приведу пример для треугольника с p/q=5/2:



И для p/q=11/4:



2.3. Целочисленное основание второй высоты.

Для любого треугольника, лежащего на координатной плоскости, с координатами вершин (-1;0), (1;0) и (0;p/q) верно то, что, если такой треугольник увеличить в (p+q2/p)/2 раз, где q-знаменатель несократимого представления p/q, точка пересечения высоты этого треугольника со стороной BC будет целой.

Доказательство: Составим уравнение прямой, на которой лежит BC и прямой, на которой лежит эта высота. Получатся такие уравнения: (p/q)y-x-1=0 и (p/q)x+y+c=0. При увеличении треугольника меняется только один важный для расположения точки D: координаты точки C. Они определяются только абсциссой, потому что точка C движется по оси абсцисс. Нам надо подобрать такую абсциссу точки C, чтобы x и y были целыми. Абсцисса точки C задается c. Запишем систему уравнений, где c - параметр.

(p/q)y-x-1=0

(p/q)x+y+c=0

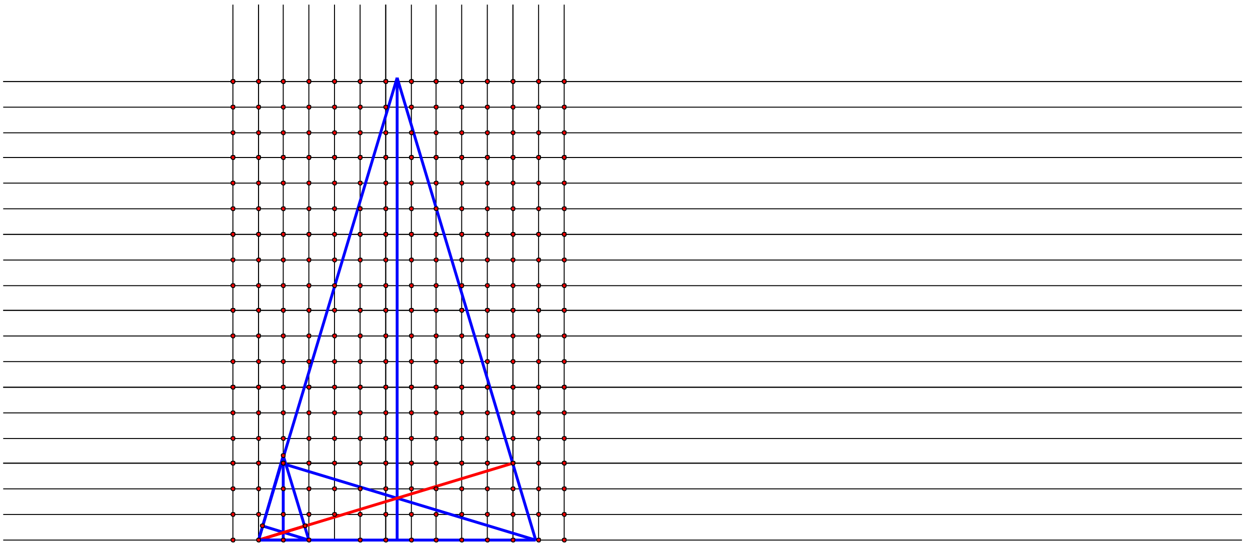
X=(p/q)y-1

(p/q) ((p/q)y-1)+y+c=0

C=(p/q)- $(p/q)^2$y-y

Чтобы x был целым, надо чтобы y делился на q. Поэтому можно принять y за q. Чтобы узнать абсциссу точки C, надо поменять знак c и разделить получившееся число на p/q. Получится: (p/q)q+q/(p/q)-1. Значит, длина основания у этого треугольника равна (p/q)q+q/(p/q). Так как изначально длина основания была равна 2, треугольник надо увеличить в $(p^2+q^2)/2p$ раз, чтобы точка пересечения этой высоты с противоположной стороной будет целой.

Приведу пример для треугольника с p/q=10/3:



И для p/q=5/2:

Вывод: *Итак, значит, треугольник, лежащий на координатной плоскости, с координатами вершин (-1;0), (1;0) и (0;p/q) надо увеличить в $(p^2+q^2)^2/4pq$ раз, чтобы его ортоцентр и точки пересечения его высот со сторонами были целыми*, потому что это число всегда делится на p.

3.Система уравнений для нахождения ортоцентра треугольника

Координаты (x;y) ортоцентра произвольного треугольника можно найти исходя из данной системы уравнений:

$(y_3-y_2)(y-y_1) / (x_2-x_3)-x+x_1=0$

$(y_3-y_1)(y-y_2) / (x_1-x_3)-x+x_2=0$

$(y_2-y_1)(y-y_3) / (x_1-x_2)-x+x_3=0$

, где $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$ и $(x_3;y_3)$ – координаты вершин треугольника.

Доказательство: Система выводится из уравнений высот, которые, в свою очередь, из уравнений сторон , на которые они опираются. Например, для стороны, координаты концов которой $(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$:

$ax_1+y_1+c=0$

$ax_2+y_2+c=0$

$c=-ax_1-y_1$

$ax_2+y_2-ax_1-y_1=0$
$a(x_2-x_1)+y_2-y_1=0$
$a=(y_1-y_2)/(x_2-x_1)$
Значит, уравнение высоты, опирающейся на эту сторону-
$((y_1-y_2)/(x_2-x_1))*(y-y_3)-x+x_3=0$
$(y_2-y_1)(y-y_3)$ / $(x_1-x_2)-x+x_3=0$
Аналогично и с другими сторонами.
Это система уравнений для произвольного треугольника. Если же, например, $x_1=x_2$, то мы получаем простые формулы для ортоцентра:
$y=y_3$,
$x=(y_3-y_2)(y_3-y_1)/(x_2-x_3)+x_2$
или если $y_2=y_3$, то
$x=x_1$,
$y=(x_1-x_2-((x_2-x_1)(x_1-x_3))/(y_3-y_1))+y_3$.
То есть, если какая-то координата у двух вершин равна, то противоположная координата ортоцентра будет равна такой же координате третьей вершины. Это верно, потому что высота, идущая из третьей вершины, перпендикулярна стороне между первыми двумя вершинами, а ортоцентр находится на высоте.