2020.02.20 / 2020.07.16

Подъемы

Написано в Клубе по Экспериментальной математике

под руководством Г.Б.Шабата и Г.А.Мерзона

Авторы:

Карасева Ольга и

Ляленко Виолетта

Содержание

....

1. Введение

Тема была нам предложена Г. А. Мерзоном

Курировалась Г. Б. Шабатом и Г. А. Мерзоном

Также идеи предлагали:

И.Р. Высоцкий, В.А. Клепцын

2. Основные определения

1. Понятие перестановки.

Перестановка - это набор чисел от 1 до n в каком-то порядке.

2. Понятие подъема.

Пусть в перестановке числа i_k и i_{k+1} следуют по порядку. Если $i_{k+1} > i_k$, то это называется подъемом. Например, в перестановке {1,5,3,4,2} всего 2 подъема.

3. Числа Эйлера 1-ого рода.

Числа перестановок из n элементов с k подъемами обозначим за <n/k> или E(n,k) и назовем числами Эйлера 1-ого рода.

4. Рекуррентная и нерекуррентная формулы.

Рекуррентная формула – формула, в которой ответ выражается через предыдущие члены.

Нерекуррентная формула – формула, в которой ответ образуется самостоятельно (без использования предыдущих членов).

3. Главная задача

Главная задача статьи заключается в исследовании подъемов и перестановок, таблицы-треугольника чисел Эйлера 1-ого рода (см. ниже), нахождения формулы (рекуррентной и нерекуррентной) для чисел Эйлера первого рода, с помощью понятных всем методов.

- Один из известнейших объектов комбинаторики – это перестановки. Только в этот раз мы не считаем, сколькими способами можно поставить в ряд n первоклассников. А мы пытаемся узнать, сколько из перестановок от 1 до n содержат k подъемов (взглянув на таблицу, почти невозможно сразу понять закономерность!), попутно решая и другие интересные задачи всем доступными методами.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	0									
2	1	1	0								
3	1	4	1	0							
4	1	11	11	1	0						
5	1	26	66	26	1	0					
6	1	57	302	302	57	1	0				
7	1	120	1191	2416	1191	120	1	0			
8	1	247	4293	15619	15619	4293	247	1	0		
9	1	502	14608	88234	156190	88234	14608	502	1	0	
10	1	1013	47840	455192	1310354	1310354	455192	47840	1013	1	0

4. Сумма чисел в строке и симметричность

Исследовать подъемы мы начали именно с заполнения таблицы на предыдущей странице (для маленьких n).

Выписать правильные строчки для n = 0, 1, 2, 3 не составило никакого труда. Для n=4 все оказалось несколько немножко сложнее.

Перед тем, как мы правильно написали строчку для n=4, у нас получился такой ответ:

<4/0>=1

<4/1>=14

<4/2>=10

<4/3>= 1

Но это было неверно, потому что сумма равна 26 (в данном примере, что является неверным).

А на самом деле сумма должна быть именно 24 (на 2 меньше), так как если мы сложим все перестановки с 0, 1, 2, 3 подъемами, то получим общее количество перестановок, которое равняется 4! = 4*3*2*1 = 24.

Дальше последовал вариант с соблюдением этого правила, но и он не достиг нужного результата:

<4/0>=1

<4/1>=16

<4/2>=6

<4/3>= 1

Потом, проверяя наш ответ и выписав все 24 перестановки, посчитав количество подъемов в каждой, мы смогли найти правильный ответ:

<4/0>=1

<4/1>=11

<4/2>=11

<4/3>=1

Нужно сказать, что в первом и втором вариантах у нас была допущена еще одна довольно очевидная ошибка: строки должны быть симметричными.

Почему? Потому что k подъемов – это n-k-1 «антиподъемов» (спадов). Значит, подсчет подъемов - тоже, что и подсчет спадов. Следовательно, $E(n,k) = E(n-k-1)$, чем и объясняется симметричность.

5. Нахождение закономерности по четности

По найденным нами столбцам от n=1 до n=4 (и дальше) можно заметить, что на вертикальных рядах k=0, k=1 и k=2 имеются закономерности по четности, которые можно записать некоторым образом (где н. = нечетное число, ч. = четное число).

Если k=0, то все видно:

н., н., н., н., н, ...

При k=1 закономерность тоже простая:

н., ч., н., ч., н., ...

В ряду k=2 работает такая схема четности:

ч., н., н., ч., ч., н., н., ч., ч, ...

Подробнее о закономерностях четности мы поговорим немножко позже, выведя некоторые основные формулы.

6. Разность между числами

Начиная с n=2 и k=1, отнимем от этого количества предыдущее n с таким же k. Мы получим следующее выражение: 1-0=1. Будем продолжать: разность между <3,1> и <2,1> равна 4-1=3.

Попробуем проделать такой же фокус для следующей пары k и n: 11-4=7. Следующие на очереди – это n=5 и n=4. Здесь 26-11=15. Теперь мы имеем некую закономерность.

Во-первых, все полученные числа – нечетные:

н., н., н., н., н., н., н., н., ...

Во-вторых – каждый следующий член последовательности равен предыдущему, умноженному на два, и еще плюс единичка:

3 = 1*2 +1,

7 = 3*2 + 1,

15 = 7*2 + 1.

Эта же закономерность может помочь вывести общую формулу для k=1 (смотрите дальше).

6.1. Распределение подъемов на три типа для n=4 и k=1

Еще можно кое-что интересное заметить на примере для n=4 и k=1. У нас есть всего 11 перестановок, которые можно распределить на три группы (p_1 – первая цифра из четырех, p_2 – вторая, и так далее):

$p_1 < p_2 > p_3 > p_4$ – первое неравенство,

$p_1 > p_2 < p_3 < p_4$ – второе неравенство,

$p_1 > p_2 < p_3 < p_4$ – третье неравенство.

Все перестановки, для n=4 и любого k, можно изобразить при помощи восьми ($1+3+3+1= 2^3$) неравенств:

k = 0:   1 неравенство.

k = 1:   3 неравенства.

k = 2:   3 неравенства.

k = 3:   1 неравенство.

А также, с помощью этих неравенств можно посчитать общее количество перестановок для любого n под определенное k.

6.2. Попытка продолжить строчку для n=5

Чтобы заполнить строчку для n=5, можно просто выписать все перестановки, а потом рассортировать по определенным k. Есть и другой вариант: найти формулу для k=1 одновременно и для k=3, а потом найти все остальные значения.

Чтобы было проще пересчитывать перестановки, можно попробовать каждый элемент раскрасить определенным цветом. После раскрашивания можно выписать такие же неравенства, как и в прошлой главе. Мы сделали таким способом:

1. Перечислили все перестановки с помощью цветов.

2. Посчитали все для k=1 (сразу и для k=3).

3. Отняли от общего количества перестановок (120) количество для k=3 и k=1 (26).

4. Выполнили действия: 120 – 26*2 – 1*2 = 66.

5. <5,0>=<5,4>=1, <5,1>=<5,3>=26, <5,2> = 66.

Вот мы заполнили ряд для n=5.

6.3. Распределение всех перестановок при n=5 и k=1

Чтобы найти формулу, можно найти зависимость между перестановками, расставив их от меньшего к большему, и между парами таких перестановок находить их разность, а затем из найти и определенную закономерность в их получении. Вот пример такой пары n=5 k=1:

12354

12435

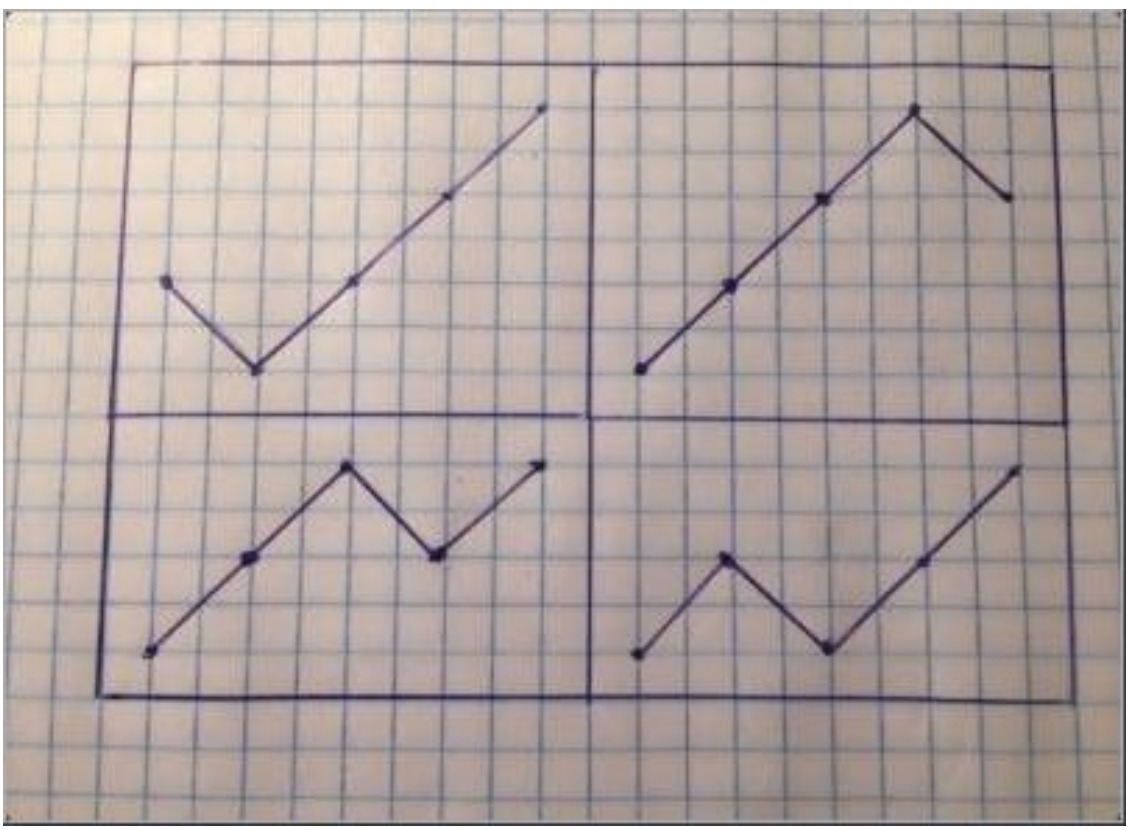
Разница равна:

12435-12354=81

Возьмем еще пару после нее. В нее будет входить большее число из предыдущей перестановки, то есть 12435. Так надо сделать, ведь нам нужно точное и полное кол-во перестановок. Тогда следующее будет 12453. Их разница равна 18. Также, как и в прошлом ответе у нас получилась число, делящееся на 9.

7. Предложение изображать перестановки графическим путем

Можно заметить, что перестановки можно изображать в виде топологических отрезков, показывающих подъемы и спады. Вот как мы их представляли:



После, Григорий Мерзон предложил распределить перестановки определенного k на разные топологические группы:

Было еще предложение от Георгия Шабата, изображать перестановки графически. При этом, каждая перестановка индивидуальна

Кстати, с помощью этого способа можно находить пропущенные числа, 23135 и 53132. Это обратные числа (в другом порядке), и таким способом можно найти пропущенное.

8. Первая рекуррентная формула

Исследуя числа Эйлера 1-ого рода, мы естественно, начали с k=1 (так как с k=0 все слишком просто: только у одной перестановки {n,n-1,…,3,2,1} нет ни одного подъема). Довольно быстро стала видна закономерность (читатель может попытаться сам ее найти):

E(3,1) = E(2,1)*2 + 2 = 4

E(4,1) = E(3,1)*2 + 3 = 11

E(5,1) = E(4,1)*2 + 4 = 26

E(6,1) = E(5,1)*2 + 5 = 57

....

E(n,1) = E(n-1,1)*2 + (n-1)

Наше собственное доказательство этого довольно громоздкое (см. дальше), зато – его нетрудно самим вывести, и оно также дает простую нерекуррентную формулу для k=1!

Сама первая рекуррентная формула подразумевает под собой формулу, которую мы будем использовать в качестве инструмента для вычисления E(n,k) при любом n, но только для k=1.

Правда, с помощью этой формулы мы сможем понять общий принцип, для произвольных n и k.

Итак, докажем первую рекуррентную формулу!

Вначале заметим, что раз формула рекуррентная, то нам в решении при выводе E(n,k) придется использовать также E(n-1,k) (и, быть может, не только это). Подумаем, как они связаны между собой.

Представим, вначале у нас была перестановка {1,2,3,…,n-1} с числами в произвольном порядке, а потом мы взяли и добавили n (а добавить мы его можем ровно n способами).

Только в данном случае мы должны добавить элемент n к перестановке {1,2,3,…,n-1} так, чтобы у нас получился ровно 1 подъем, ни больше, ни меньше.

Итак, тогда у нас должна быть перестановка от 1 до n-1, с 1 подъемом. Таких есть E(n-1,1). А мы вставили в эту перестановку еще n. Причем, число подъемов должно не измениться.

Первым приходит в голову, что мы можем поставить n в самое начало перестановки (тогда новых подъемов не обнаружится). Посмотрев на примеры, мы поняли, что n можно поставить также между двумя числами, образующими подъем. Допустим, у нас была перестановка {4,2,1,5,3} с 1 подъемом, и мы к ней добавляем еще 6. Сделать это можно, как видите, двумя способами: {6,4,2,1,5,3} и {4,2,1,6,5,3}.

Теперь мы знаем, откуда появилось первое слагаемое E(n-1,1)*2 в нашей рекуррентной формуле. Но откуда взялось еще одно?

А дело вот в чем. У нас же в изначальной перестановке не обязательно был один подъем, могло быть и 0 подъемов (а прибавлением числа n мы увеличили число подъемов на 1). Правда, у нас есть такая одна-единственная перестановка, но вставить в нее n мы можем целым n-1 способом (это все из n мест, кроме самого первого).

Так мы и доказали нашу первую рекуррентную формулу (а от этого доказательства рукой подать до вывода общей рекуррентной формулы, к которому мы сейчас и перейдем).

9. Общая рекуррентная формула

Выведем и докажем рекуррентную формулу чисел Эйлера 1-ого рода для произвольных n и k.

Заметим все же, что она применима только для n>k (n<k быть просто по определению не может, а при n=k искомое значение просто равно 0; кроме E(0,0)=1). Также, формулу трудно применять при k=0, но это и не требуется, так как мы знаем, что E(n,0)=1 при любых натуральных n.

Для выведения формулы мы будем прибавлять к перестановке {1,2,...,n-1} n-ый элемент, как и раньше. Рассмотрим два случая (их всего лишь два, так как элемент n может либо не изменить число подъемов, либо увеличить их количество на один), в которых у нас в итоге получатся перестановки от 1 до n с k подъемами.

1. В перестановке {1,2,...,n-1} был только k-1 подъем (таких перестановок всего E(n-1,k-1)). Тогда мы должны добавить элемент n так, чтобы число подъемов увеличилось. Всего у нас n мест, чтобы

поставить элемент n в перестановку. Если мы поставим n в самое начало перестановки, то число подъемов не увеличится. Также, число подъемов не будет увеличиваться, если мы будем втискивать число n между двумя числами, образующими подъем. Итого у нас будет n-1-(k-1) = n-k мест вставить элемент n в перестановку. И всего способов E(n-1,k-1)*(n-k).

2. В перестановке {1,...,n-1} уже есть k подъемов (таковых E(n-1,k)). Тогда мы должны посчитать, сколькими способами мы можем вставить элемент n без увеличения числа подъемов. Во-первых, мы можем вставить число n вначале перестановки, а во-вторых – между каждой из k пар чисел, образующих подъем. Всего k+1 способов. Итого имеем: E(n-1,k)*(k+1).

Сложив оба слагаемых, получаем общую рекуррентную формулу, которую так долго искали:

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = (k+1)\left\langle {n-1 \atop k} \right\rangle + (n-k)\left\langle {n-1 \atop k-1} \right\rangle$$

10. Первая нерекуррентная формула

Первую рекуррентную формулу (для k=1 и произвольного n) мы уже вывели, теперь нужно вывести и первую нерекуррентную.

Представим, что мы еще не знаем общую формулу (рекуррентную) и будем выводить искомую без всяких посторонних сведений (как сделали авторы).

Раз k=1, то подъемов в нашей перестановке будет ровно 1. Пусть первое число в подъеме – это s, а второе s+t (очевидно, s и t – натуральные числа).

Теперь представим нашу перестановку в виде маленькой схемы (на месте троеточий – промежутков 1 и 2 - должны быть еще не использованные числа):

......, s, s+t, ...

Числа, которые больше s+t, могут находиться либо на промежутке 1, либо на промежутке 2. Если хотя бы одно из них будет находиться на последнем промежутке, то образуется хотя бы один лишний подъем, что нам совсем не нужно.

Это значит, что все числа больше s+t будут на промежутке 1. Причем, в убывающем порядке, и перед ними не будет никаких посторонних чисел (иначе ситуация нам опять будет грозить лишними подъемами).

По аналогии, все числа меньше s, будут находиться в самой правой части последовательности.

$$\{ > s+t \}, \quad \ldots\ldots, \quad s, \quad s+t, \quad \ldots\ldots, \quad \{ < s \}$$

У нас осталось всего t-1 число (каждое из них мы можем поставить на одно из двух троеточий). Первое – на одно из двух, второе – на одно из двух, последнее – на одно из двух. Итого имеем:

$2 * 2 * 2 * \ldots * 2 = 2^{t-1}$

Можно рассуждать и по-другому: мы должны выбрать какое-то подмножество чисел и поместить его, допустим, в первый промежуток. А все оставшиеся числа – во второй (каждое такое действие осуществимо с точки зрения условия задачи и дает одну перестановку).

И так как способов выбрать подмножество из t-1 всего 2^{t-1}, то и искомых перестановок столько же.

А теперь рассмотрим все возможные значения t и числа перестановок, соответствующие им.

Если t=1, то имеем n-1 пар {s, s+t} (и перестановок 2^0),

если t=2, то имеем n-2 пар {s, s+t} (и перестановок 2^1),

если t=3, то имеем n-3 пар {s, s+t} (и перестановок 2^2),

....,

если t=n-1, то имеем 1 паре {s, s+t} (и перестановок 2^{n-2}),

По этой информации мы сможем выразить <n/1> (число пар с разницей t умножаем на соответствующее число перестановок 2^{t-1}):

$$2^0 \cdot (n-1) + 2^1 \cdot (n-2) + 2^2 \cdot (n-3) + 2^3 \cdot (n-4) + \ldots + 2^{n-2} \cdot 1$$

Понятно, что нам не очень понравился такой громоздкий ответ, и мы его решили упростить. Для подсчета больших n использовать его абсолютно неудобно.

Такие суммы часто считаются при помощи индукции. Поэтому при решении мы и решили воспользоваться «методом математической индукции». Но у нас не было окончательной формулы, для того, чтобы провести переход от n к n+1.

Поэтому мы решили для начала просто просчитать разницу между E(n,k) и E(n+1,k).

$E(n,k) = 2^0 \cdot (n-1) + 2^1 \cdot (n-2) + ... + 2^{n-2} \cdot 1$

$E(n+1,k) = 2^0 \cdot n + 2^1 \cdot (n-1) + ... + 2^{n-2} \cdot 2 + 2^{n-1} \cdot 1$

$E(n+1,k) – E(n,k) = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + … + 2^{n-1}$

Как известно, эта сумма равняется 2^n-1 (можно применить и формулу суммы геометрической прогрессии, и тот самый метод математической индукции).

Используя то, что мы уже нашли разность между значениями n, отличающимися на единичку, мы напишем следующее:

$E(1,1) = 0$

$E(2,1) = 2^1 – 1$

$E(3,1) = 2^1 – 1 + 2^2 – 1$

$E(4,1) = 2^1 – 1 + 2^2 – 1 + 2^3 – 1$

……………………………………………..

$E(n,1) = 2^1 – 1 + 2^2 – 1 + … + 2^{n-1} – 1 =$

$= 2^1 + 2^2 + 2^3 + … + 2^{n-2} + 2^{n-1} – 1\cdot(n-1)$

Эту сумму, в отличие от той, что была у нас вначале, посчитать уже несложно:

$$2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-2} + 2^{n-1} - 1\cdot(n-1) =$$

$$= (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-2} + 2^{n-1}) - 1 - (n-1) =$$

$$= (2^n - 1) - 1 - (n - 1) =$$

$$= 2^n - 1 - 1 - n + 1 =$$

$$= 2^n - n - 1$$

Искомая формула выведена!

Мы ее можем проверить для небольших n:

$E(1,1) = 2^1 - 1 - 1 = 2 - 2 = 0$

$E(2,1) = 2^2 - 2 - 1 = 4 - 3 = 1$

$E(3,1) = 2^3 - 3 - 1 = 8 - 4 = 4$

$E(4,1) = 2^4 - 4 - 1 = 16 - 5 = 11$

$E(5,1) = 2^5 - 5 - 1 = 32 - 6 = 26$

Если взглянуть на таблицу для E(n,k) при небольших значениях, представленную в самом начале (в разделе «Главная задача»), то полученные по формуле значения будут совпадать с предложенными в таблице.

10.1. Более простой вывод формулы

Доказательство, представленное выше, является довольно сложным, в плане большого количества формул и, как следствие, большой вероятность ошибки или опечатки.

Оказывается, если знать общую рекуррентную формулу, то вывести нерекуррентную для n=1, становится гораздо проще.

Итак, в этом случае, рекуррентная формула будет выглядеть так:

$$E(n,1) = 2*E(n-1,k) + (n-1)* E(n-1,0)$$

А что такое E(n-1,0)? Это, конечно, 1 (так как для определенного n существует лишь одна перестановка с нулевым количеством подъемов).

Формула принимает следующий вид:

$$E(n,1) = 2*E(n-1,k) + (n-1)$$

Здесь нам опять поможет рассмотрение нескольких примеров (случай E(1,1)=0 мы пропускаем):

$$E(2,1) = 1$$

$$E(3,1) = 2 \cdot E(2,1) + 2$$

$$E(4,1) = 2 \cdot (2 \cdot E(2,1) + 2) + 3 = 4 \cdot E(2,1) + (2^2 + 2^3 – 5)$$

$$E(5,1) = 2 \cdot (4 \cdot E(2,1) + 7) + 4 = 8 \cdot E(2,1) + (2^3 + 2^4 – 6)$$

$$E(6,1) = 2 \cdot (8 \cdot E(2,1) + 18) + 5 = 16 \cdot E(2,1) + (2^4 + 2^5 – 7)$$

$$E(7,1) = 2 \cdot (16 \cdot E(2,1) + 41) + 6 = 32 \cdot E(2,1) + (2^5 + 2^6 – 8)$$

…………………………………………………………………………………

$$E(n,1) = 2^{n-2} \cdot E(2,1) + (2^{n-2} + 2^{n-1} – (n+1))$$

Почему последняя написанная формула для E(n,1) верна, несложно догадаться из приведенных выше преобразований. Тем более, если формула для E(n,1) верна, то она верна и для E(n+1,1).

Теперь немножко упростим полученную формулу:

$$2^{n-2} \cdot E(2,1) + (2^{n-2} + 2^{n-1} – (n+1)) =$$

$$= 2^{n-2} \cdot 1 + 2^{n-2} + 2^{n-1} – n – 1 =$$

$$= 2^{n-2} + 2^{n-2} + 2^{n-1} – n – 1 =$$

$$= 2^n – n – 1$$

И в этом случае искомая формула получилась такой же (только более быстрым путем).

11. Вторая нерекуррентная формула

Теперь попробуем, по аналогии, вывести вторую нерекуррентную формулу (для произвольного n и k=2). Для этого мы изберем именно второй путь (из двух, представленных выше).

При этом мы воспользуемся результатами всего того, что сделали раньше. Во-первых, нам известно, что:

$E(n,2) = 3 \cdot E(n-1,2) + (n-2) \cdot E(n-1,1)$

Но что такое $E(n-1,1)$? По результатам предыдущих исследований, это $2^{n-1} – n$. Мы можем подставить это в нашу формулу:

$E(n,2) = 3 \cdot E(n-1,2) + (n-2) \cdot (2^{n-1} – n)$

Вначале обратим внимание на последнее слагаемое.

Заметим, что если взять последнее слагаемое из выражения для $E(n+1,2)$ и вычесть из него последнее слагаемое из выражения для $E(n,2)$, то получится следующее: $n \cdot (2^{n-1} – 2) + 1$ (этим мы воспользуемся в дальнейшем).

Также мы можем посмотреть, как оно себя ведет на примерах и сделать вывод об общей формуле.

Начнем мы именно с E(3,2) = 1.

И тогда у нас не останется в формуле частей, «напоминающих» о рекуррентном соотношении:

$$E(3,2) = 1$$

$$E(4,2) = 3 + 2 \cdot (2^3 - 4)$$

$$E(5,2) = 3^2 + 3 \cdot 2 \cdot (2^3 - 4) + 3 \cdot (2^4 - 5)$$

$$E(6,2) = 3^3 + 3^2 \cdot 2 \cdot (2^3 - 4) + 3 \cdot 3 \cdot (2^4 - 5) + 4 \cdot (2^5 - 6)$$

…………………………………………………………………………………………

$$E(n,2) = 3^{n-3} + 3^{n-4} \cdot 2 \cdot (2^3 - 4) + 3^{n-5} \cdot 3 \cdot (2^4 - 5) +$$

$$+ 3^{n-6} \cdot 4 \cdot (2^5 - 6) + \ldots + 3^{n-(n-1)} \cdot (n-3) \cdot (2^{n-2} - (n-1)) +$$

$$+ 3^0 \cdot (n-2) \cdot (2^{n-1} - n)$$

Мы получили вот такое сложное выражение. При упрощении (совершаемом компьютерной программой) оно принимает следующий, более простой вид:

$$\left\langle \frac{n}{2} \right\rangle = 3^n - \frac{(2^{n+1} - n) \cdot (n+1)}{2}$$

12. Явная формула

При помощи компьютерного суммирования подобных последовательностей были выведены четыре первых рекуррентных формулы, а пятая была «экспериментально предсказана» и проверена.

Можно заметить, что у полученных формул много общего:

Первая нерекуррентная формула:

$$\left\langle {n \atop 1} \right\rangle = 2^n - (n+1)$$

Вторая нерекуррентная формула:

$$\left\langle {n \atop 2} \right\rangle = 3^n - (n+1) \cdot 2^n + \frac{n^2+n}{2}$$

Третья нерекуррентная формула:

$$\left\langle {n \atop 3} \right\rangle = 4^n - (n+1) \cdot 3^n + \frac{(n^2+n) \cdot 2^n}{2} - \frac{n^3-n}{6}$$

Четвертая нерекуррентная формула:

$$\left\langle {n \atop 4} \right\rangle = 5^n - (n+1) \cdot 4^n + \frac{(n^2+n) \cdot 3^n}{2} - \frac{(n^3-n) \cdot 2^n}{6} + \frac{(n^4-2n^3-n^2+2n)}{24}$$

Пятая нерекуррентная формула:

$$\left\langle {n \atop 5} \right\rangle = 6^n - (n+1) \cdot 5^n + \frac{(n^2+n) \cdot 4^n}{2} - \\ - \frac{(n^3-n) \cdot 3^n}{6} + \frac{(n^4-2n^3-n^2+2n) \cdot 2^n}{24} + \\ + \frac{(n^5-5n^4+5n^3+5n^2-6n)}{120}$$

По аналогии можно записать и общую нерекуррентную формулу (чтобы не использовать многоточия, сразу выведем общий член). Вначале она выглядела так:

$$\sum_{r=1}^{k+1} \frac{\left(-1\right)^{k-r-1} \cdot r^n \cdot \left(\prod_{i=n+1-k+r}^{n+1} i\right)}{\left(k+1-r\right)!}$$

Потом были замечены биномиальные коэффициенты, и выражение для явной (нерекуррентной) формулы значительно упростилось:

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \sum_{i=1}^{k+1} C_{n+1}^{k-i+1} \cdot i^n \cdot (-1)^{k-i+1}$$

12.1. Доказательство

Докажем выведенную в предыдущем разделе рекуррентную формулу. Для этого нужно проверить следующее тождество:

$$(n - k) \cdot \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} \cdot C_n^{k-i} \cdot i^{n-1} +$$

$$+ (k + 1) \cdot \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{k-i+1} \cdot C_n^{k-i+1} \cdot i^{n-1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{k-i+1} \cdot C_{n+1}^{k-i+1} \cdot i^{n}$$

Каждому слагаемому второй суммы (то есть, суммы, умноженной на $k+1$), за которое «отвечает» множитель i^{n-1} $(1 \leq i \leq k+1)$, сопоставим слагаемое первой суммы (умноженной на $n-k$), за которое тоже «отвечает» i^{n-1} (при этом, слагаемому, содержащему $(k+1)^{n-1}$, формально сопоставляется число 0).

Пусть, для определенности, перед слагаемым из второй скобки стоит «плюс», а перед слагаемым из первой – «минус».

Докажем, что при вычислении суммы таких двух любых слагаемых должно получиться $C_{n+1}^{k-i+1} \cdot i^n$ (то есть, каждые такие два слагаемых из первой части дают каждое [соответствующее] слагаемое из правой части). Иначе говоря, докажем что:

$$(k+1) \cdot C_n^{k-i+1} \cdot i^{n-1} - (n-k) \cdot C_n^{k-i} \cdot i^{n-1} = C_{n+1}^{k-i+1} \cdot i^n$$

Или: $(k+1) \cdot C_n^{k-i+1} - (n-k) \cdot C_n^{k-i} = C_{n+1}^{k-i+1} \cdot i$

Дальнейшее заключается в упрощении левой части:

$$\frac{(k+1) \cdot n!}{(k-i+1)! \cdot (n-k+i-1)!} - \frac{(n-k) \cdot n!}{(k-i)! \cdot (n-k+i)!} =$$

$$= \frac{(k+1) \cdot n!}{(k-i+1) \cdot (k-i)! \cdot (n-k+i-1)!} -$$

$$- \frac{(n-k) \cdot n!}{(k-i)! \cdot (n-k+i) \cdot (n-k+i-1)!} =$$

$$= \frac{n! \cdot (k+1) \cdot (n-k+i) - n! \cdot (n-k) \cdot (k-i+1)}{(k-i+1)! \cdot (n-k+i)!} =$$

$$= \frac{(n+1)! \cdot i}{(k-i+1)! \cdot (n+1-(k-i+1))!} = C_{n+1}^{k-i+1} \cdot i$$

Что и требовалось доказать! Заметим, что приведенные преобразования верны и для всех значений i (и для $(k+1)^{n-1}$). Формула верна для небольших значений n и k, и для нее работает рекуррентная формула, что доказывает правильность в общем случае.

13. Четность

Теперь поговорим поподробнее о четности. Сначала просто рассмотрим каждый столбец отдельно.

Случай k=0 более, чем очевиден: все числа в нем равны единице, и, следовательно, являются нечетными.

При k=1 четные и нечетные числа будут чередоваться. Будет работать такая схема четности:

ч., н., ч., н., ч., н., ч., н., ч., н., ...

Доказать это несложно. Мы просто воспользуемся нерекуррентной формулой для E(n,1):

$E(n,1) = 2^n - n - 1$

Рассмотрим отдельно четные и нечетные n (они чередуются друг с другом).

1). Если у нас n нечетное (начиная с n=1). При этом число 2^n является четным. Отнимая n, мы получаем разность вида Ч-Н=Н. И еще нужно не забыть единичку: Н-1=Ч. Как видим, получилось четное число.

2). Если у нас n – четное (начинаем с n=2), то 2^n – тоже четное и получается такая схема: Ч-Ч-1=Ч-1=Н. Результат – нечетное число.

Делаем вывод: так как сами четные и нечетные значения n чередуются, то и четность чисел E(n,1) будет чередоваться.

Теперь посмотрим, что будет при n=2.

Будем использовать нерекуррентную формулу (ищите ее в предыдущем разделе). Простой подстановкой Н или Ч вместо числа n здесь обойтись сложно. Так что лучше разобьем все возможные n на четыре класса ($n \equiv x, \mod 4$) и посмотрим, что будет происходить в каждом случае (вместо n просто нужно подставить 4k+x и отметить четность получившегося выражения при помощи простых операций):

- 4k. Здесь E(n,2) <u>не</u>четно.
- 4k+1. E(n,2) четное.
- 4k+2. E(n,2) четное.
- 4k+3. А здесь E(n,2) <u>не</u>четно.

Так как всего остатков при делении на 4 и есть четыре (0 тоже будем считать за остаток), то никаких «посторонних» n образоваться не должно:

ч., н., н., ч., ч., н., н., ч., ч., н., н., ч., ч., н., н., ...

Эта закономерность была нами замечена и раньше.

Теперь разберемся с более интересным случаем $n=3$. Для этого вспомним такую формулу:

$$E(n,3) = 4 \cdot E(n-1,3) + (n - 3) \cdot E(n-1, 2)$$

Из этой формулы видно, что при определении четности числа $E(n,3)$ мы пользуемся четностью числа $E(n-1,2)$. Сначала рассмотрим небольшие значения $E(n,3)$ и на основании этого сделаем вывод об общей закономерности.

$n = 3$. $E(3,3) = 0$.

$n = 4$. $E(4,3) = 1$. ✓

$n = 5$. $E(5,3) = 4 \cdot Н + Ч \cdot Ч = Ч$.

$n = 6$. $E(6,3) = 4 \cdot Ч + Н \cdot Ч = Ч$.

$n = 7$. $E(7,3) = 4 \cdot Ч + Ч \cdot Ч = Ч$.

$n = 8$. $E(8,3) = 4 \cdot Ч + Н \cdot Н = Н$. ✓

$n = 9$. $E(9,3) = 4 \cdot Н + Ч \cdot Ч = Ч$. [Возвращаемся к $n = 5$.]

Таким образом, нечетные значения $E(n,3)$ достигаются только при кратных четырем n:

$n = 4, n = 8, n = 12, \dots , n = 4k, \dots$.

В остальных случаях $E(n,3)$ – четные числа.

14. Суммирование бесконечных последовательностей

Давайте рассмотрим целый класс бесконечно убывающих прогрессий следующего вида:

$$1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 + t^6 - \ldots ;$$

$$- t + 2t^2 - 3t^3 + 4t^4 - 5t^5 + 6t^6 -$$

$$- t + 4t^2 - 9t^3 + 16t^4 - 25t^5 + 36t^6 - \ldots ;$$

$$- t + 8t^2 - 27t^3 + 64t^4 - 125t^5 + 216t^6 - \ldots ;$$

$$- t + 16t^2 - 81t^3 + 256t^4 - 625t^5 + 1296t^6 - \ldots ;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

$$- t + 2^s t^2 - 3^s t^3 + 4^s t^4 - 5^s t^5 + 6^s t^6 - \ldots .$$

Общий вид последовательности будет таков:

$\sum_{i=0}^{\infty} i^s (-t)^i$, где $s \in \mathbb{N}$ (или, в одном случае, $s = 0$) – определенное для каждой из последовательностей число, а i пробегает значения от 0 до бесконечности.

Эти последовательности у нас получилось просуммировать при помощи Maple (системы компьютерной алгебры). Как мы были удивлены, когда получили следующее (для s от 0 до 7 включительно):

$$\sum_{i=0}^{\infty} i^s (-t)^i$$

$$0, \frac{1}{t+1}$$

$$1, -\frac{t}{(t+1)^2}$$

$$2, \frac{t(t-1)}{(t+1)^3}$$

$$3, -\frac{t(t^2-4t+1)}{(t+1)^4}$$

$$4, \frac{t(-11t^2+11t+t^3-1)}{(t+1)^5}$$

$$5, -\frac{t(1-26t^3+66t^2+t^4-26t)}{(t+1)^6}$$

$$6, \frac{t(-1+t^5+302t^3-302t^2-57t^4+57t)}{(t+1)^7}$$

$$7, -\frac{t(1-120t^5-2416t^3+1191t^2+1191t^4+t^6-120t)}{(t+1)^8}$$

А вот что получается при раскрытии скобок и упорядочивании степеней:

$$s=0: \quad \frac{1}{t+1}$$

$$s=1: \quad \frac{-t}{(t+1)^2}$$

$$s=2: \quad \frac{t^2-t}{(t+1)^3}$$

$$s=3: \quad \frac{-t^3+4t^2-t}{(t+1)^4}$$

$$s=4: \quad \frac{t^4-11t^3+11t^2-t}{(t+1)^5}$$

$$s=5: \quad \frac{-t^5+26t^4-66t^3+26t^2-t}{(t+1)^6}$$

$$s=6: \quad \frac{t^6-57t^5+302t^4-302t^3+57t^2-t}{(t+1)^7}$$

$$s=7: \quad \frac{-t^7+120t^6-1191t^5+2416t^4-1191t^3+120t^2-t}{(t+1)^8}$$

Если внимательно посмотреть, то можно обнаружить некоторые закономерности (особенно во втором случае, где все степени расположены в порядке убывания).

Например, в знаменателе каждой посчитанной суммы (t+1) стоит в степени, на единицу большей, чем значение s.

Но все гораздо интереснее в числителе: в глаза бросаются уже давно знакомые нам числа Эйлера 1-ого рода.

При любом s перед t^s стоит коэффициент E(s,0), перед t^{s-1} – коэффициент E(s,1), перед t^{s-2} – E(s,2), перед t^{s-3} – E(s,3) и так далее до $t^{s-(s-1)} = t$, при котором коэффициент равен E(s,s-1) = 1. Но это – без учета знака коэффициента E(s,k).

То есть, при определенном s, в числителе мы можем встретить все числа вида E(s,k), где k равняется любому целому числу из промежутка [0,s-1].

Но, при этом, перед четными степенями t стоит знак «+», а перед нечетными - «–».

Удивительная закономерность, не так ли?

14.1. Дзета-функция и эта-функция

Если при рассматривании полученных в предыдущем разделе последовательностей мы подставим в них $t = 1$, то получатся закономерности следующего вида (для удобства знаки были изменены на противоположные):

$$1 - 2^s + 3^s - 4^s + 5^s - 6^s + 7^s - \ldots$$

Несложно заметить, что полученная функция очень похожа на дзета-функцию Римана для отрицательных значений s:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \ldots$$

Если подставлять значения $s < 0$, то вместо «обычной» суммы получится знакопеременная функция (а знаменатель «переедет» наверх), и как раз будет $1 - 2^s + 3^s - 4^s + 5^s - \ldots$.

При этом существует аналог дзета-функции Римана – эта-функция Дирихле:

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} - \dots$$

При подстановке отрицательных s получается ровно наблюдаемая нами закономерность.

То есть, если понять, как связаны дзета-функция и эта-функция, можно научиться вычислять значения дзета-функции при отрицательных s.

Для того, чтобы это сделать, разложим дзета-функцию Римана в произведение нескольких сумм (при раскрытии скобок появится каждое слагаемое, причем только один раз, что несложно вывести из Основной теоремы арифметики):

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \dots =$$

$$= \left(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \dots\right)\left(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \dots\right)\left(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{25^s} + \dots\right)\dots$$

С эта-функцией можно проделать подобную операцию. Правда, придется учитывать знаки. Так как минус стоит только перед слагаемыми, соответствующими четным знаменателям, то минусы будут только в первой скобке. Остальные скобки будут повторять дзета-функцию:

$$\eta(s) = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} - \ldots =$$

$$= \left(\frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} - \frac{1}{4^s} - \ldots\right)\left(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \ldots\right)\left(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{25^s} + \ldots\right)\ldots$$

Теперь можно найти частное двух представляемых функций:

$$\frac{\eta(s)}{\zeta(s)} = \frac{\frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} - \frac{1}{4^s} - \frac{1}{8^s} - \frac{1}{16^s} - \cdots}{\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{8^s} + \frac{1}{16^s} + \ldots}$$

Для того, чтобы не вычислять все в пределах четырехэтажной дроби, можно сделать замену

$$q = \frac{1}{2^s} = 2^{-s}$$

Вид дроби значительно упрощается:

$$\frac{\eta(s)}{\zeta(s)} = \frac{1 - q - q^2 - q^3 - q^4 - q^5 - \ldots}{1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + \ldots} = \frac{2 - \frac{1}{1-q}}{\frac{1}{1-q}} = 1 - 2q$$

Если сделать обратную замену:

$$\frac{\eta(s)}{\zeta(s)} = 1 - 2 \cdot 2^{-s} = \frac{2^{s-1} - 1}{2^{s-1}}$$

Покажем на примере, как с помощью этой формулы находить значения дзета-функции при $s < 0$.

Рассмотрим конкретный случай $s = -3$.

$$\eta(-3) = 1 \cdot 1 - 8 \cdot 1^2 + 27 \cdot 1^3 - \ldots = \frac{1^3 - 4 \cdot 1^2 + 1}{(1+1)^4} = -\frac{1}{8}$$

$$\zeta(-3) = \eta(-3) \div \frac{2^{-4} - 1}{2^{-4}} = -\frac{1}{8} \div (-15) = \frac{1}{120}$$

Используя это, можно заполнить первую колонку значений дзета-функции при целых s:

$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{\zeta(s)}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{\zeta(s)}$
-1	–	1	∞
-2	0	2	$\pi^2 / 6$
-3	1 / 120	3	≈ 1,20206
-4	0	4	$\pi^4 / 90$
-5	- 1 / 252	5	≈ 1,03693
-6	0	6	$\pi^6 / 945$
-7	1 / 240	7	≈ 1,00835
-8	0	8	$\pi^8 / 9450$
-9	- 1 / 132	9	≈ 1,00201
-10	0	10	$\pi^{10} / 93555$

При $s = -1$ дзета-функция не определена (в худшем случае, равна $-1/12$), а при $s = 1$ получается расходящийся гармонический ряд. Также считается, что $\zeta(0) = -0{,}5$. В правой колонке значений дзета-функции числа иррациональные, а в левой – рациональные (можно доказать, что эта-функция всегда рациональна). При отрицательных четных s функция обнуляется.

14.2. Почему именно эта закономерность?

Под словом «эта закономерность» подразумевается именно получение чисел Эйлера 1-ого рода при подсчете сумм такого вида:

$$f(s) = t - 2^s t^2 + 3^s t^3 - 4^s t^4 + 5^s t^5 - \ldots$$

Начнем с того, что если продифференцировать $f(s)$ и умножить на t, то получится $f(s+1)$:

$$t \cdot (f(s))' = t \cdot (1 - 2^{s+1}\, t + 3^{s+1} t^2 - 4^{s+1} t^3 + \ldots) =$$

$$= (t - 2^{s+1} t^2 + 3^{s+1} t^3 - 4^{s+1} t^4 + \ldots) = f(s+1)$$

То есть, последовательность задается следующей рекуррентной формулой: $f(s+1) = t \cdot f'(s)$.

Теперь представим, что (где $\mathrm{P}(s)$ – искомый многочлен, который, как оказалось, содержит числа Эйлера 1-ого рода):

$$f(s) = \frac{\mathrm{P}(s)}{(1+t)^{s+1}}$$

$\mathrm{P}(s)$ действительно будет многочленом, рациональной функцией. Это было проверено для небольших s.

Но если мы будем дифференцировать рациональную функцию (и потом умножать на t), задающуюся отношением двух многочленов, то, конечно, тоже получится рациональная функция.

Поэтому дальнейшая задача заключается в том, чтобы связать $\mathrm{P}(s)$ и $\mathrm{P}(s+1)$.

Начнем с дифференцирования многочлена $P(s)$:

$$P'(s) = (f(s) \cdot (1+t)^{s+1})' =$$

$$= f'(s) \cdot (1+t)^{s+1} + f(s) \cdot (s+1) \cdot (1+t)^{s}$$

Теперь все это помножим на t:

$$P'(s) \cdot t =$$

$$= t \cdot f'(s) \cdot (1+t)^{s+1} + f(s) \cdot (s+1) \cdot (1+t)^{s}$$

Сразу же заменим $t \cdot f'(s)$ на $f(s+1)$:

$$P'(s) \cdot t = \underbrace{f(s+1) \cdot (1+t)^{s+1}}_{\dfrac{P(s+1)}{1+t}} + \underbrace{t \cdot f(s) \cdot (s+1) \cdot (1+t)^{s}}_{\dfrac{P(s) \cdot (s+1) \cdot t}{1+t}}$$

Из получившегося уравнения несложно вывести рекуррентную формулу (с использованием $P(s)$) для многочлена $P(s+1)$:

$$P(s+1) = P'(s) \cdot t \cdot (1+t) - P(s) \cdot (s+1) \cdot t$$

Теперь можно доказать необходимое равенство (используя полученную рекуррентную формулу для $P(s)$ и рекуррентную формулу для $E(n,k)$).

Рассмотрим произвольное слагаемое $E(s,k) \cdot t^{s-k}$ в многочлене $P(s)$ и его «поведение» при применении рекуррентной формулы. У нас получится три новых слагаемых:

$-(s+1) \cdot E(s,k) \cdot t^{(s+1)-k}$;

$+(s-k) \cdot E(s,k) \cdot t^{(s+1)-k}$;

$+(s-k) \cdot E(s,k) \cdot t^{s-k}$.

В итоге мы получили фактически все слагаемые с t в степени $(s+1)-k$. Последнее слагаемое, со степенью t на один меньше, чем требуется, нужно заменить на $-(s-k+1) \cdot E(s,k-1) \cdot t^{(s+1)-k}$.

В итоге коэффициент при $t^{(s+1)-k}$ будет следующий:

$$t^{(s+1)-k} \cdot (-E(s,k) \cdot (k+1) - E(s-1,k) \cdot (s-k+1)) =$$
$$= -t^{(s+1)-k} \cdot E(s+1,k)$$

То есть, мы из слагаемого $+E(s,k) \cdot t^{s-k}$ получили соответственно $-t^{(s+1)-k} \cdot E(s+1,k)$.

Абсолютно также можно действовать, если перед рассматриваемым в самом начале слагаемым был знак «минус», или присутствовали не все три слагаемых с заданной степенью $(s+1)-k$. Получится, что если в $P(s)$ в роли коэффициентов были числа Эйлера 1-ого рода (что было нами проверено при небольших s), то и в $P(s)$ они тоже будут.

Интересно заметить, что можно было считать не знакопеременную сумму, а сумму с постоянным знаком из тех же слагаемых.

$$t+2^s t^2+3^s t^3+4^s t^4+5^s t^5+\ldots$$

Тогда мы бы получили те же самые числа Эйлера в числителе. Например:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^7 x^n = \frac{x\left(x^6+120x^5+1191x^4+2416x^3+1191x^2+120x+1\right)}{(x-1)^8}$$

При этом:

$$P(s+1)= P'(s)\cdot t\cdot(1-t)+ P(s)\cdot(s+1)\cdot t$$

Но мы рассматривали именно знакопеременный ряд, так как он помогает вычислить дзета-функцию при отрицательных значениях s, используя эта-функцию в соответствующих значениях.

15. Перестановки с переменными знаками

Раньше мы рассматривали перестановки из натуральных чисел от 1 до n. То есть каждое число в такой перестановке имело положительный знак.

А сейчас мы будем рассматривать немного другие перестановки: они тоже будут состоять из чисел от 1 до n, но перед каждым числом будет либо знак «+», либо знак «–».

Множество таких перестановок обозначим за $S_n^{\pm}$.

Совсем несложно посчитать количество элементов (то есть количество перестановок) в таком множестве. Если не учитывать знаки перед каждым числом, будет, очевидно, n! элементов. Но так как перед каждым числом есть один из двух знаков, то полученное число (n!) еще нужно домножить на двойку еще n раз. То есть:

$$\left|S_n^{\pm}\right| = 2^n \cdot n!$$

В дальнейшем мы будем исследовать такие множества перестановок, в частности, на подъемы и смены знаков.

15.1. Графическое изображение перестановок с переменными знаками

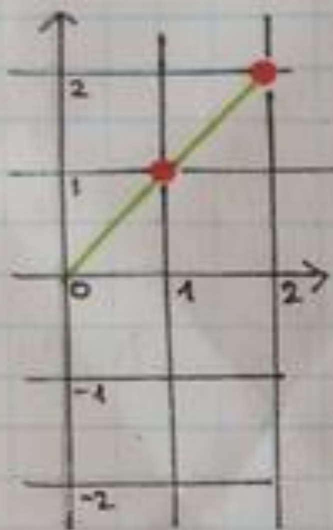
Подъемы в перестановках с переменными знаками можно изображать графически, точно также, как и подъемы в «обычных» перестановках (фотографию смотрите на следующей странице).

Покажем это на примере $S_2^{\pm}$.

Мы знаем, что $\left|S_2^{\pm}\right| = 2^2 \cdot 2! \ = \ 4 \cdot 2 \ = \ 8.$

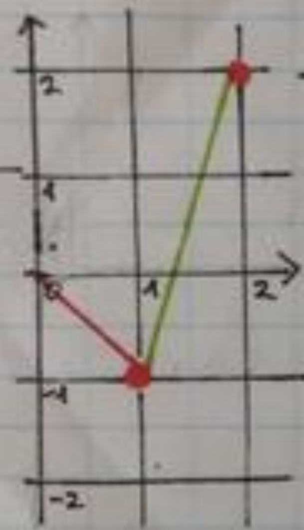
На графиках всех 8 перестановок подъемы отмечены зеленым, а спады - красным (при этом, как и раньше, первый отрезок на графике, вне зависимости от того, какого он цвета, мы не будем считать ни подъемом, ни спадом). Значит, в каждой перестановке этого вида есть либо 1 подъем (таких 4), либо 1 спад (тоже 4). Интересно посмотреть и на количество перемен знака в каждой перестановке (оно написано в квадратных скобках под графиком). 0 перемен и 2 перемены – по 2 перестановки в каждом случае, 1 перемена – 4 перестановки.

$S_2^{\pm}$ — 8 перестановок



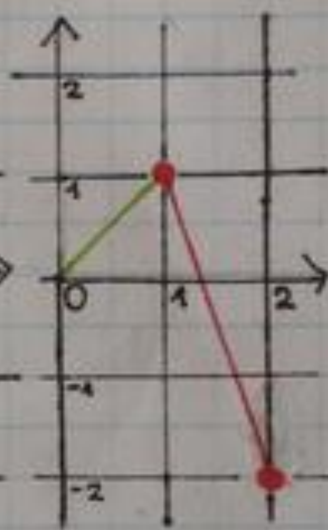
$(1;2)$

[0]



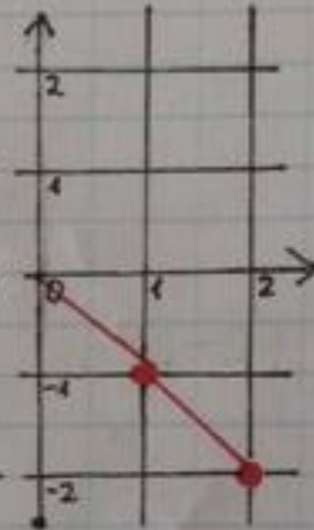
$(-1;2)$

[2]



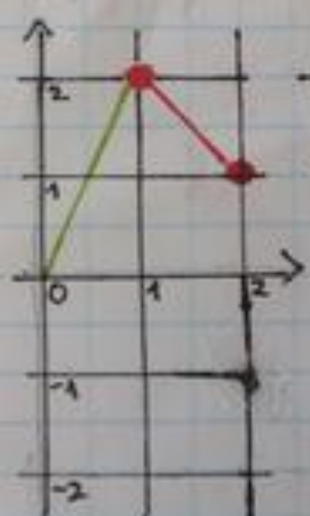
$(1;-2)$

[1]



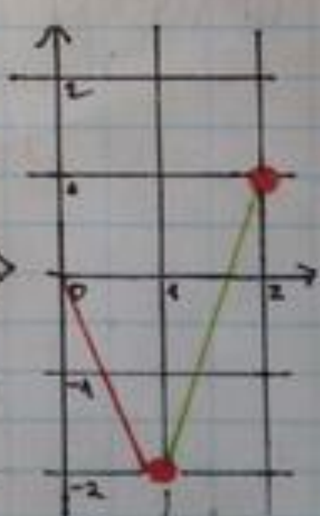
$(-1;-2)$

[1]



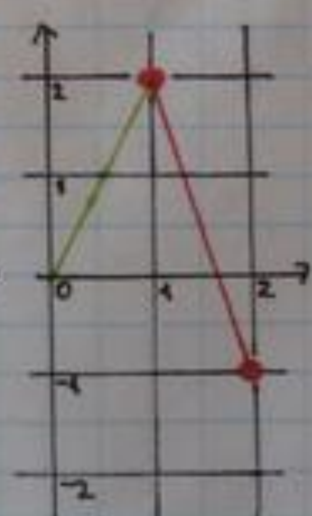
$(2;1)$

[0]



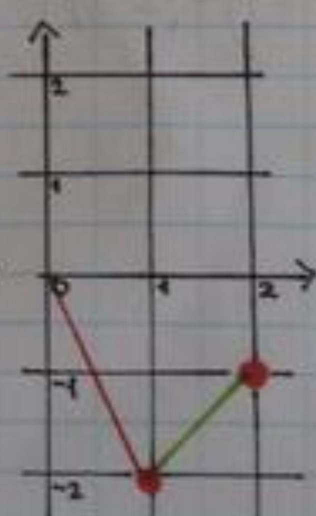
$(-2;1)$

[2]



$(2;-1)$

[1]



$(-2;-1)$

[1]

16. Рекуррентная формула

Попробуем вывести общую рекуррентную формулу (по аналогии с тем, как это было сделано в разделах 8-9).

Вначале для удобства ведем обозначения:

$$G(n,k) \quad \textit{или} \quad \left\langle {n \atop k} \right\rangle^{\pm}$$

– количество перестановок с произвольными знаками из n элементов с k подъемами.

Начнем с тех же самых двух случаев, отвечающих на вопрос «Как мы могли получить число G(n,k)?»:

1). Мы к перестановкам вида G(n-1,k) так добавили элемент {n} или {-n}, что число подъемов не изменилось. Здесь опять все разобьем на два случая:

1.1. Добавляли {n}. Как было выяснено в незапамятные времена, мы могли это сделать *k+1* способами.

1.2. Добавляли {-n}. При постановке этого элемента в конец или между двумя числами, образующими подъем, число подъемов остается неизменным (а при постановке в начало или между двумя числами, образующими спад – увеличивается на 1). Следовательно, здесь имеем тоже *k+1* способов.

<u>2).</u> К какой-то перестановке вида G(n-1,k-1) мы добавили элемент {n} или {-n} (и число подъемов, ясное дело, увеличилось на 1).

2.1. Добавили {n}. Так как при внесении числа {n} в перестановку между двумя числами, образующими подъем (k-1 место), и в конец числа (1 место) число подъемов не изменяется, то искомое число способов равно n-(k-1)-1=*n-k*. Здесь кусок формулы точь-в-точь такой же, как и в формуле для E(n,k).

2.2. Добавили {-n}. Число подъемов не увеличится при постановке {-n} в конец и между двумя числами, образующими подъем (таких мест k-1). Как всегда, искомое число способов: n-1-(k-1)=*n-k*.

Итак, запишем полностью формулу (как видим, она очень похожа на выведенную ранее формулу для «обычных» перестановок):

$$G(n-1,k)\cdot\ (k+1)+\ G(n-1,k-1)\cdot\ (n-k)+$$

$$+G(n-1,k)\ \cdot\ (k\ +\ 1)\ +\ G(n-1,k-1)\ \cdot\ (n-k)=$$

$$=\boldsymbol{G(n-1,k)}\ \cdot\ \boldsymbol{(2k+2)}\ +\ \boldsymbol{G(n-1,k-1)}\ \cdot\ \boldsymbol{(2n-2k)}$$

16.1. Случай k = 0

Числа вида E(n,0) устроены очень просто: каждое из них (при $n \in \mathbb{N}$ или даже $n = 0$) равняется 1, по вполне очевидным причинам.

В это же время числа G(n,0) и равные им G(n,n-1) устроены гораздо интереснее (умение вычислять их понадобится нам при построении треугольника чисел вида G(n,k)):

$$G(0,0) = 1;$$

$$G(1,0) = 2;$$

$$G(2,0) = 4;$$

$$G(3,0) = 8;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Гипотеза заключается в том, что $G(n, 0) = 2^n$.

А доказать ее можно при помощи индукции. Первый шаг (база индукции) нами уже преодолен: мы проверили утверждение для $n = 0, \ldots, 3$. Второй шаг заключается в том, что, зная верность утверждения для всех чисел от 0 до n, доказать ее для n+1.

Итак, пусть G(n,0) = 2^n. Докажем, что в этом случае G(n+1,0) = 2^{n+1}.

Все перестановки вида G(n+1,0) можно получить при помощи прибавления элемента {n+1} / {-n-1} к перестановкам G(n,0). Причем, мы это должны сделать так, чтобы никаких новых подъемов не прибавилось.

Если мы возьмем некоторую перестановку вида G(n,0), то мы всегда сможем в нее добавить элемент {n+1} (в самое начало) и элемент {-n-1} (в конец), причем каждый – одним способом.

То есть каждой перестановке класса G(n,0) мы можем сопоставить по две из класса G(n+1,0). Причем, это соответствие взаимно однозначное, и никаких перестановок, не затронутым им, образоваться не должно.

То есть, $2 \cdot G(n, 0) = G(n + 1{,}0)$, откуда делаем вывод, что $G(n + 1{,}0) \;=\; 2 \cdot 2^n \;=\; 2^1 \cdot 2^n \;=\; 2^{n+1}$, что и требовалось доказать.

Точно также формула доказывается и для G(n,n-1):

$$G(n, 0) \;=\; G(n - 1, n) \;=\; 2^n$$

17. Таблица-треугольник чисел вида G(n,k)

Для чисел вида G(n,k), точно также, как и для чисел E(n,k), можно составить таблицу-треугольник (смотрите внизу страницы), показывающую значение числа G(n,k) при определенных n и k очень скромных размеров (тем не менее, это значение достаточно быстро растет и уже при n = 7 может оказаться шестизначным!).

Как видим, мы получили фактически такую же таблицу, как и для «обычных перестановок», с точностью до умножения каждого числа на 2^n. И именно поэтому в строке с номером n каждое число делится на 2^n.

n/k	***0***	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***…***	***Σ***
0	1									1
1	2	0								2
2	4	4	0							8
3	8	32	8	0						48
4	16	176	176	16	0					384
5	32	832	2112	832	32	0				3840
6	64	3648	19328	19328	3648	64	0			46080
7	128	15360	152448	309248	152448	15360	128	0		645120
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

18. Подъемы: другой подход к определению

Раньше у нас подъемы определялись только в рамках двух чисел i_k и i_{k+1}, следующих по порядку (изначальное определение, в любом случае, можно посмотреть в разделе 2).

Вопросов, нужно сказать, не возникало, пока мы не начали рассматривать перестановки с произвольными знаками и рисовать их графики (14 – 14.1). Каждый график брал свое начало в точке с координатами (0;0) и представлял некоторое множество точек, соединенных отрезками. Каждый отрезок (кроме, почему-то, самого первого) обозначал подъем или спад.

Нам стало интересно, а что будет, если подъемом / спадом считать отношение также между «нулевым» и первым числом? К примеру, мы представляем каждую перестановку в виде (0;1;2;3) или (0;-3;1;-2;-4), ставим перед ней 0 на самое-самое первое место и, например, (0;1) считаем подъемом, а (0;-3) – спадом.

Исходя из этого подхода, будем строить таблицы-треугольники, и считать число подъемов.

18.1. Еще одна рекуррентная формула

В этом разделе выведем еще одну рекуррентную формулу, но только для перестановок с переменными знаками и «дополнительным подъемом» (так назовем еще один, не предполагаемый изначальным определением, подъем).

Вначале введем «ясный символ для ясной мысли»:

> $\overline{G}(n,k)$ – *число перестановок из n элементов с k подъемами, включая «дополнительный подъем».*

Но вначале обратим внимание, что $\overline{G}(n,0) = 1$, так как существует только одна удовлетворяющая нас перестановка:

(0; -1; -2; -3; -4; -5; ... ; -n)

Точно также (в частности, из-за симметрии), верно, что $\overline{G}(n,n) = 1$. Единственная перестановка такого вида будет выглядеть следующим образом (она будет состоять из n основных элементов с n подъемами):

(0; 1; 2; 3; 4; 5; ... ; n)

Идеи аналогичного выведения рекуррентной формулы будут такие:

- Число n для получения перестановки вида $\overline{G}(n,k)$ в каждую из перестановок вида $\overline{G}(n-1,k-1)$ можно добавить $n-k+1$ способами.
- А в каждую из перестановок вида $\overline{G}(n-1,k)$ – всего ровно k способами.
- Число –n в перестановку вида $\overline{G}(n-1,k-1)$ можно добавить $n-k$ способами правильным образом.
- А в перестановку вида $\overline{G}(n-1,k)$ – всего $k+1$ способами.

Полученная формула будет иметь следующий вид:

$$\boldsymbol{\overline{G}(n-1,k)\cdot(2k+1)+\overline{G}(n-1,k-1)\cdot(2n-2k+1)}$$

Она несколько отличается от формулы для чисел вида $G(n,k)$, из-за того, что коэффициент при $\overline{G}(n-1,k)$ на один меньше, а при $\overline{G}(n-1,k-1)$ – на один больше.

Интересно заметить, что благодаря такой рекуррентной формуле и калькулятору можно получить и доказать явную и красивую формулу в случае k = 1:

$$\overline{G}(n,1) = 3^n - n - 1$$

18.2. Таблица-треугольник

Составим таблицу-треугольник для малых значений чисел вида $\overline{G}(n,k)$. Для этого нам понадобятся всего лишь знание того, что $\overline{G}(n,0) = \overline{G}(n,n) = 1$, а также рекуррентная формула, выведенная в предыдущем разделе:

$$\boldsymbol{\overline{G}(n,k) = \overline{G}(n-1,k)\cdot(2k+1) + \overline{G}(n-1,k-1)\cdot(2n-2k+1}$$

n/k	***0***	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***…***	$\boldsymbol{\Sigma}$
0	1									1
1	1	1								2
2	1	6	1							8
3	1	23	23	1						48
4	1	76	230	76	1					384
5	1	237	1682	1682	237	1				3840
6	1	722	10543	23548	10543	722	1			46080
7	1	2179	60657	259723	259723	60657	2179	1		645120
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Если бы мы строили таблицу-треугольник такого вида для чисел $\overline{E}(n,k)$, то все столбцы просто бы сдвинулись на один вправо (так как там «дополнительный подъем / спад» - это всегда «подъем»). В случае чисел $\overline{G}(n,k)$ все оказалось, как видите, гораздо интереснее!

19. Число смен знаков

Сейчас мы займемся еще одной интересной задачей – исследованием числа перестановок вида $G(n,k)$ с определенным количеством смен знака.

Пусть $\varepsilon(n,t)$ - это число перестановок из n элементов с t сменами / переменами знаков (используем именно букву t, так как, во-первых, буква k уже занята, а во-вторых, t – сокращение от англ. «transition» - изменение, преобразование или переход).

И, при этом, мы должны определиться, что именно мы будем считать переменой знака. Вполне понятно, что если два числа следуют по порядку и у одного из них положительный знак, а у другого – отрицательный, то эти два числа образуют перемену знака. Но возник вопрос: если первое число в нашей перестановке отрицательное, то это является сменой знака или нет?

Мы опять же решили «поставить эксперимент» и проверить оба случая. Сейчас будем разбирать именно случай без «дополнительного подъема» (то есть, если перестановка начинается отрицательным числом, то это не является сменой знака).

Попробуем составить таблицу-треугольник количества перемен знаков и найти общую формулу для $\varepsilon(n, t)$.

Эта задача фактически полностью сводится к следующей: даны n элементов («шаров»), все они разные, и между ними нужно расставить t перегородок так, чтобы между любыми двумя перегородками был хотя бы один шар. Сколькими способами можно это сделать?

Понятно, что t перегородок можно расставить между n шарами C_{n-1}^{t} способами, так как все перегородки одинаковые, и их можно поставить только между двумя соседними шарами. Но нужно не забывать и про шары: то способов их расставить в ряд n!. В ответ подзадачи про шары как раз и пойдет произведение этих двух чисел.

Также это произведение – почти ответ на задачу про число смен знаков. Потому что нужно дописать умножение на двойку. Почему? Существуют две возможные конфигурации знаков: у первой группы чисел знак либо положительный (и дальше идет чередование), либо отрицательный (и опять же однозначное чередование).

Поэтому искомая формула такова (она не подходит для $n = 0$ и $n = 1$, но в этом нет большой беды):

$$\varepsilon(n, t) \ = \ 2 \ \cdot \ C_{n-1}^{t} \ \cdot \ n!$$

Нужно сказать, что эту задачу можно решать и через рекуррентную формулу. Правда, она довольно сложна (а также придется находить нерекуррентные формулы для $\varepsilon(n, 0)$ и $\varepsilon(n, 1)$):

$$\boldsymbol{\varepsilon(n, t) = \ \varepsilon(n-1, t) \cdot \ (n+t) + \ \varepsilon(n-1, t-1) \cdot \ 2 \ + \ \varepsilon(n-1, t-2) \ \cdot}$$

При описании процесса выведения этой рекуррентной формулы все получится несколько сложнее, чем при выведении предыдущих рекуррентных формул: придется рассматривать уже целых 3 случая. То есть, эта рекуррентная формула выражает каждый член через три других (кроме случаев, когда $n = 0$ и $n = 1$, которые выделяются обоих способах решения задачи: как рекуррентном, так и нерекуррентном).

1). Пусть мы добавили элемент {n} / {-n} и число подъемов осталось прежним. То есть, мы получаем $\varepsilon(n, t)$ из $\varepsilon(n-1, t)$. Оказывается, мы можем добавить {n} и {-n} в каждую из t пар чисел, образующих смену знака, а также во все остальные места – но по одному определенному числу. Итого $n + t$ способов.

2). Могло произойти так, что мы добавили {n} / {-n} и число смен знаков увеличилось на 1. Получаем $\varepsilon(n,t)$ из $\varepsilon(n-1,t-1)$. Правда, разгуляться здесь негде: есть всего лишь 2 способа: в конец или в начало ставим соответствующее число.

3). Интересно и то, что мы можем так добавить элемент {n} / {-n} в перестановку, что число смен знака увеличится на 2! Так что для нахождения $\varepsilon(n,t)$ придется затронуть даже число $\varepsilon(n-1,t-2)$. Способов сделать это есть ровно $n-t$.

Если все перемножить и просуммировать, то получится вышеупомянутая рекуррентная формула. По этой рекуррентной формуле или по более простой нерекуррентной можно составить следующую таблицу :

n/t	***0***	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***…***	***Σ***
0	1									1
1	2	0								2
2	4	4	0							8
3	12	24	12	0						48
4	48	144	144	48	0					384
5	240	960	1440	960	240	0				3840
6	1440	7200	14400	14400	7200	1440	0			46080
7	10080	60480	151200	201600	151200	60480	10080	0		645120
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…