

СУММЫ ДВУХ КВАДРАТОВ

Михаил Музыченко

2024

Апрель

Содержание

1	Определения	1
2	Теорема о хороших простых числах	1
3	Теорема о количестве разложений произведения нескольких хороших чисел на сумму двух квадратов	2

1. Определения

Определение 1.1. Хорошее число - простое число, которое является суммой двух квадратов.

Определение 1.2. Плохое число - простое число, которое не является суммой двух квадратов.

2. Теорема о хороших простых числах

Является ли простое число суммой двух квадратов или, по нашему определению, хорошее оно или плохое, можно определить по тому, как оно делится на 4.

Теорема 1. Если простое число делится на 4 с остатком 1 или 2, то это число хорошее. Если простое число делится на 4 с остатком 3, то это плохое число.

Доказательство. Доказано экспериментально на числах от 2 до 1000000. □

3. Теорема о количестве разложений произведения нескольких хороших чисел на сумму двух квадратов

Количество разложений произведения нескольких хороших чисел на сумму двух квадратов показано в таблице ниже.

|||

4

например

$$5 * 13 * 17 = 1105 = 4^2 + 33^2 = 9^2 + 32^2 = 12^2 + 31^2 = 23^2 + 24^2$$

2 |

3

например

$$5 * 5 * 17 = 425 = 5^2 + 20^2 = 8^2 + 19^2 = 13^2 + 16^2$$

3

2

например

$$5 * 5 * 5 = 125 = 2^2 + 11^2 = 5^2 + 10^2$$

||||

8

например

$$5 * 13 * 17 * 29 = 32045 = 2^2 + 179^2 = 19^2 + 178^2 = 46^2 + 173^2 = 67^2 + 166^2 = 74^2 + 163^2 = 86^2 + 157^2 = 109^2 + 142^2 = 122^2 + 131^2$$

2 ||

6

например

$$5 * 5 * 17 * 29 = 12352 = 2^2 + 111^2 = 15^2 + 110^2 = 33^2 + 106^2 = 54^2 + 97^2 = 65^2 + 90^2 = 78^2 + 79^2$$

3 |

4

например

$$5 * 5 * 5 * 29 = 3625 = 5^2 + 60^2 = 12^2 + 59^2 = 32^2 + 51^2 = 40^2 + 45^2$$

4

3

например	$5 * 5 * 5 * 5 = 625 = 0^2 + 25^2 = 7^2 + 24^2 = 15^2 + 20^2$
	16
2	12
3	8
4	5
5	3
	32
2	24
3	16
4	10
5	6
6	4

В первом столбце знак | означает любое разное (уникальное) хорошее число, а цифры означают количество повторяющихся хороших чисел. Цифры во втором столбце указывают на количество разложений на квадраты. Одинаковым цветом выделены одинаковые типы произведений.

Количество разложений произведения n хороших разных чисел равно 2^{n-1} .

Следующее число в одинаковом цвете равно предыдущему числу умноженному на 2, за исключением серого цвета.

Для чисел серого цвета:

Если число множителей четное, то следующее серое число будет равно предыдущему.

Если число множителей нечетное, следующее серое число будет равно предыдущему числу +1.

Например,

кол-во множителей	число разложений
2	2
3	2
4	3
5	3
6	4
7	4
8	5
9	5
10	6
11	6
12	7
13	7

Проверено скриптом `may_script_gray_Copy of math 24.1.24.ipynb` для чисел от 2 до 13.