

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
Лицей

Индивидуальная выпускная работа
Стратификация пространств многочленов одной переменной

Выполнил Попов Андрей Станиславович

Научный консультант:
Шабат Георгий Борисович

Москва
2023

Содержание

1	Введение	1
1.1	Общий обзор	1
1.2	Цель исследования и ключевая гипотеза	3
2	Многочлены 1-й и 2-й степеней	3
3	Многочлены 3-й степени	4
4	Многочлены 4-й степени	8
5	Многочлены 5-й степени и их аналоги	13
5.1	Определение форм	13
5.2	Наблюдения	17
5.3	Модули. Аналоги графиков 5-й степени	19
6	Заключение	24
7	Приложение	26
7.1	Формула Кардано	26
7.2	Треугольник Эйлера-Бернулли	26

1 Введение

1.1 Общий обзор

Термин «стратификация» используется в многих науках и сферах, например, в математике, географии и медицине. Стратификация происходит от латинских слов «stratum» и «facio», что буквально переводится, как «слой» и «делать» соответственно. В математике стратификация – разбиение на непересекающиеся множества. Одна из проблем, связанных с данной работой, является исследование форм графиков, а после разбиение (стратификация) пространств многочленов разных степеней по формам их графиков. Связанная с этой задачей - рассмотрение точек пересечения рассматриваемых графиков с горизонтальными прямыми, то есть качественное исследование полиномиальных уравнений с одной неизвестной.

Ещё до нашей эры люди умели решать квадратные уравнения для практических целей, например, связанных с нахождением площадей земельных участков. Но не были найдены записи, как методы решений бытовых задач, связанных с математикой, были выведены. В начале VI века н. э. был установлен один из известных выводов формулы для нахождения корней квадратного многочлена, который принадлежит индийскому учёному Брахмагупте (алгоритм нахождения корней описан в главной его работе, Брахмаспунасандханте) [1, с. 111].

К многочленам третьей степени пытались подойти многие, но все вплоть до XVI века приходили к выводу, что это сделать невозможно. Лука Пачоли (1445–1514, итальянский математик, имевший большой авторитет) сравнил сложность решения кубических уравнений с квадратурой круга (как теперь известно, нерешаемая задача, заключающаяся в построении при помощи циркуля и линейки квадрата по площади равного данному кругу). *«Нашелся человек, которого мнение Пачоли не остановило. Это был профессор математики в Болонье Сципион дель Ферро (1465 – 1526); он нашел способ решать уравнения $x^3 + ax = b$ Отрицательными числами тогда еще не пользовались и, например, уравнение $x^3 = ax + b$ воспринималось как совсем другое! Об этом решении известны лишь косвенные сведения»* [1, с. 15].

Вскоре, во время поединка по решению задач между Сципионом Дель Ферро и Никколо Тартальей, последний вывел метод решения уравнений третьей степени, но держал свой метод в секрете. Одному выдающемуся человеку всё-таки удалось уговорить Тарталью рассказать свой метод. Им был Джероламо Кардано (1501-1576), который позже сумел вывести формулу для корней многочленов третьей степени вида $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (формула Кардано представлена в исследовании). Стоит отметить, что, помимо вещественных решений, Кардано рассматривал и наличие комплексных корней.

Математикам XVI века, а точнее Лодовико Феррари, одному из лучших учеников Кардано, удалось также разрешить вопрос об уравнении четвёртой степени вида $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, которое можно свести к виду $x^4 + px^2 + qx + r = 0$. *«Согласно методу Феррари, решение уравнения четвертой степени сводится к решению вспомогательного кубического уравнения и двух квадратных уравнений»* [3, с. 31].

По теореме Абеля – Руффини для общего уравнения степени больше четвёртой невозможно указать формулу для корней, содержащую арифметические

операции и операцию извлечения корней.

Поиск и нахождение корней уравнений разных степеней помогают структурировать знания, глубже разобраться в многочленах и их свойствах. Сейчас у нас есть важные и полезные инструменты – вычислительные машины (в частности, персональные компьютеры) и Интернет. Благодаря им возможна визуализация некоторых математических объектов и процессов (например, изменение графика многочлена от изменения коэффициента), быстрый счёт и многое другое. А опираясь на знания, полученные учёными ранее, открыт путь для изучения нового.

1.2 Цель исследования и ключевая гипотеза

Целью данного исследования является доказательство гипотезы о том, что формы графиков функций с фиксированным количеством участков возрастания и убывания (сумма количеств участков возрастания и убывания назовём *сложностью*) реализуются формами графиков многочленов и кусочно-линейных функций. В ходе исследования перечислены формы графиков функций ограниченной сложности. Указанные количества быстро возрастают, в чём можно убедиться, обратившись к треугольнику Эйлера-Бернулли (см. 5.1) . В связи с этим, их перечисление скоро становится затруднительным. В исследовании рассматриваются формы графиков ≤ 5 .

2 Многочлены 1-й и 2-й степеней

Изучение графиков начнём с многочленов 1-й степени. Формула для произвольного графика 1-й степени выглядит так:

$$f(x) = kx + b, \text{ где } k \neq 0.$$

График такой функции – прямая. Если $k < 0$, то функция убывает.

Если $k > 0$, то функция возрастает. От свободного члена b форма графика не зависит.

Соответствующие графики имеют одно пересечение с осью x при $k \neq 0$, а при $k = 0$ может бесконечное количество пересечений ($b = 0$) или не иметь их вовсе ($b \neq 0$).

Общий вид многочлена 2-й степени:

$$ax^2 + bx + c, \text{ где } a \neq 0$$

Если $a > 0$, график - парабола с "ветвями вверх".

Если $a < 0$, график - парабола с "ветвями вниз".

Отметим, что от коэффициента b зависит скорость изменения расстояния между точками с одинаковым значением по вертикальной оси, принадлежащими разным "ветвям" параболы, а также координаты её вершины. От коэффициента c зависит смещение по оси y . Но b и c не влияют на форму графика.

Для многочлена 2-й существует такое выражение, которое обращается в ноль тогда и только тогда, когда два решения совпадают. Такое выражение называется *дискриминантом*, и для многочлена второй степени оно выглядит так:

$$D_2 = b^2 - 4ac.$$

Аналогичные многочлены, зависящие от коэффициентов уравнения существуют и для других степеней, они равны 0 тогда и только тогда, когда многочлены имеют кратные корни (см. "Многочлены 3-й степени").

При $D < 0$ график не имеет пересечений с осью x , при $D = 0$ график имеет одну точку пересечения с осью x , а при $D > 0$ график имеет две точки пересечения с осью x .

3 Многочлены 3-й степени

Общий вид:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d, \text{ где } a \neq 0.$$

Теорема 1. *Любой многочлен 3-й степени можно привести к виду $x^3 + px + q$.*

Доказательство. \square Произведём следующие преобразования, предварительно для удобства заменив b и c на $3b$ и $3c$ соответственно.

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$$
$$a \left(x^3 + 3\frac{b}{a}x^2 + 3\left(\frac{b}{a}\right)^2 x + \left(\frac{b}{a}\right)^3 \right) - 3\frac{b^2}{a}x - \frac{b^3}{a^2} = 0$$

$$a \left(x + \frac{b}{a} \right)^3 + 3 \left(c - \frac{b^2}{a} \right) x + d - \frac{b^3}{a^2} = 0$$

Введём замену: $x + \frac{b}{a} = y \Leftrightarrow x = y - \frac{b}{a}$

$$ay^3 + 3 \left(c - \frac{b^2}{a} \right) y - 3 \frac{bc}{a} + 3 \frac{b^3}{a^2} + d - \frac{b^3}{a^2} = 0 \mid : a$$

$$y^3 + 3 \left(\frac{c}{a} - \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right) y - 3 \frac{bc}{a^2} + 2 \left(\frac{b}{a} \right)^3 + \frac{d}{a} = 0$$

Введём замену: $p = \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{a} \right)^2$, $q = -3 \frac{bc}{a^2} + 2 \left(\frac{b}{a} \right)^3 + \frac{d}{a}$.

Получим:

$$y^3 + 3py + q = 0. \blacksquare$$

Отметим, что корни многочлена 3-й степени находятся по формуле Кардано (см. 7.1).

Введём обозначения. Промежутки убывания функции будем называть *склонами*, промежутки возрастания – *подъёмы*, минимумы – *ямами*, максимумы – *вершинами*, а значение вершин и ям по вертикальной оси – соответственно *высотами* и *глубинами*.

Перечислим формы графиков многочленов 3-й степени:

3.1 С двойным изгибом, с одной ямой.

3.2 С плавным изгибом, без ям.

У первой формы графика возможно одно, два (их на самом деле три, два из которых совпадают) или три пересечения с горизонтальной осью. Найдём условие для наличия двух совпадающих решений. По теореме Безу, если у многочлена есть корень a , то $(x - a)$ является делителем данного многочлена. Пусть корнями многочлена 3-й степени являются числа x_1 и x_2 . Тогда данный многочлен можно разложить на множители следующим образом: $(x - x_1)(x - x_2)^2$. Раскроем скобки:

$$(x - x_1)(x^2 - 2x_2x + x_2^2) = x^3 - 2x^2x_2 + xx_2^2 - x^2x_1 + 2xx_1x_2 - x_1x_2^2 =$$

$$= x^3 + x^2(-2x_2 - x_1) + x(x_2^2 + 2x_1x_2) - x_1x_2^2$$

Сопоставим получившееся выражение с видом многочлена третьей степени, применив теорему о тождественности многочленов. Получим систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2^2 + 2x_1x_2 = p \\ -x_1x_2^2 = q \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения x_1 через x_2 и подставим в оставшиеся два, получим:

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ p = -3x_2^2 \\ q = 2x_2^3 \end{cases}$$

Получаем следующее соотношение $\frac{q}{p} = -\frac{2}{3}x_2$. Но также $x_2 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$. Тогда получим:

$$\frac{q}{p} = \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$$

$$\frac{q^3}{p^3} = -\frac{8}{27} \frac{q}{2}$$

$$\frac{q^2}{p^3} = -\frac{4q}{27} \Rightarrow 27q^2 + 4p^3 = 0$$

Выражение $27p^2 + 4p^3$ называется *дискриминантом* многочлена $x^3 + px + q$ и обозначается D_3 . Построим график D_3 в координатах $(p; q)$ (Рис.1).

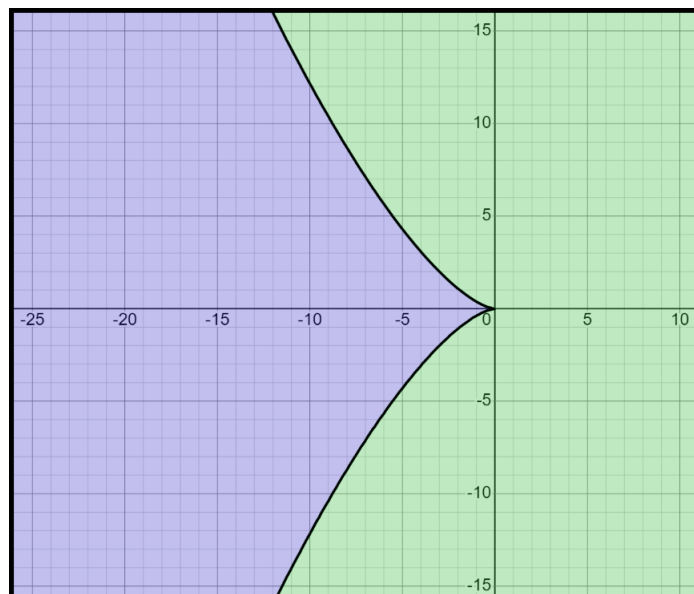


Рис. 1: График дискриминанта многочлена третьей степени

Рассмотрим четыре точки, принадлежащие соответственно следующим областям: внутри получившегося графика (рис.1, синяя область), на самом графике, снаружи от него при $p < 0$ и снаружи при $p > 0$. Запишем результат. Рассмотрим многочлен $x^3 + p_1x + q_1$

3.1. Если точка (p_1, q_1) лежит внутри графика $D_3 = 0$ ($D_3 < 0$). График многочлена имеет 3 пересечения с горизонтальной осью.

3.2. Если точка (p_1, q_1) принадлежит на графике $D_3 = 0$. График многочлена имеет 2 пересечения с горизонтальной осью. Многочлен данного графика отличается от 1-й формы только наличием кратных корней.

3.3. Если точка (p_1, q_1) лежит снаружи от графика $D_3 = 0$ ($D_3 > 0$) и $p_1 < 0$. График многочлена имеет 1 пересечение с горизонтальной осью.

3.4. Если точка (p_1, q_1) лежит снаружи от графика $D_3 = 0$ ($D_3 > 0$) и $p_1 > 0$ многочлен имеет 1 корень.

Графики 3.1, 3.2, 3.3 относятся к одной форме (одна вершина, одна яма), они отличаются количеством пересечений горизонтальной оси. График 4 представляет собой другую форму, без ям. Первая форма реализуется при $p_1 < 0$, вторая - при $p_1 > 0$.

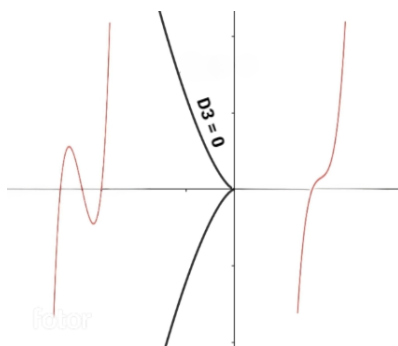


Рис. 2: Распределение форм графиков многочленов третьей степени

Найдём производную многочлена 3-й степени $f(x) = x^3 + p_1x + q_1$:

$$f'(x) = 3x^2 + p_1.$$

Уравнение $3x^2 + p_1 = 0$ имеет три решения: два решения при $p_1 < 0$, одно решение при $p_1 = 0$ и не имеет решений при $p_1 > 0$. Производная функции, чей график принадлежит форме 3.1, дважды обращается в ноль (это нам известно, так как у формы 3.1 есть локальные минимум и максимум), а производная функции, чей график принадлежит 3.2, в 0 не обращается. Отсюда следует, что график

формы 3.1 получается в случаях 1), 2) и 3), а форма 3.2 – только в случае 4. Заметим, что у второй формы графика всегда 1 решение, так как функция монотонно возрастает на всей области допустимых значений.

4 Многочлены 4-й степени

Общий вид:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, \text{ где } a \neq 0.$$

Преобразованиями, аналогичными преобразованиям многочлена общего вида 3-й степени, приведём к виду $x^4 + ax^2 + bx + c$. Так как от свободного члена форма графика не зависит, далее будет использоваться координатная плоскость (a, b) .

Определим формы графиков:

4.1.1 С двумя "ямами". Левая "яма глубже" правой.

4.1.2 С двумя "ямами". Правая "яма" глубже "левой".

4.2.1 Одна "яма" с изгибом. Изгиб слева относительно "ямы".

4.2.2 Одна "яма" с изгибом. Изгиб справа относительно "ямы".

4.3.1 Одна "яма без изгибов. Расширяется быстрее вправо.

4.3.2 Одна "яма без изгибов. Расширяется быстрее влево.

Формы 4.1.1 и 4.1.2 (с двумя ямами) назовём *главными*. Формы 4.2.1 и 4.2.2 – *упрощёнными*. У главных форм может быть 2 или 4 пересечения с горизонтальной осью (если рассматривать случаи, когда многочлен имеет кратные корни то также существуют случаи и с одни или 3 пересечениями). А упрощённые формы имеют 2 пересечения (если многочлен имеет кратные корни, то может быть также одно пересечение).

Между главными и упрощёнными формами есть *граница* – форма графика с точкой перегиба, касательная к которой параллельна оси x . Заметим, что есть граница и между главными формами - график, в котором "ямы" имеют одинаковую "глубину". А также существует граница между упрощёнными формами, образующимися при $a > 0$ (рис. 7).

Для начала изучим первые четыре формы. Эти графики, а также график, являющийся границей между ними, будут иметь 4 пересечения с осью x , два из которых соответственно совпадают с двумя оставшимися. Если же учитывать свободный член, то при различных его значениях главные графики могут иметь 1, 2, 3 или 4

пересечения с осью x , а график - граница - 2, 3 или 4 пересечения.

Рассмотрим подробнее границу между главными графиками.

Теорема 2. *График многочлена $x^4 + ax^2 + bx + c$ имеет две ямы с одинаковыми глубинами тогда и только тогда, когда коэффициент $b = 0$.*

Доказательство. \square Разложим многочлен с двумя кратными корнями следующим образом:

$$\begin{aligned}x^4 + ax^2 + bx + c &\equiv (x^2 + px + q)^2 = x^4 + 2x^3p + 2x^2q + p^2x^2 + 2pqx + q^2 = \\ &= x^4 + 2px^3 + (2q + p^2)x^2 + 2pqx + q^2.\end{aligned}$$

Так как многочлены тождественны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую степень и коэффициенты при одноимённых степенях переменной в обоих многочленах равны, получим систему:

$$\begin{cases} 2p = 0 \\ 2q + p^2 = a \\ b = 2pq. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения p и подставим в остальные, получим:

$$\begin{cases} p = 0 \\ q = \frac{a}{2} \\ b = 0 \end{cases}$$

Значит, при наличии кратных корней у многочлена 4-й степени коэффициент b обращается в 0. Также заметим, что при $b = 0$, график становится чётным. \blacksquare

Для определения условий для различных форм графиков многочленов

$$f(x) = x^4 + ax^2 + bx$$

потребуется производная. Найдём её:

$$f'(x) = 4x^3 + 2ax + b.$$

В выражение $D_3 = 27q^2 + 4p^3 = 0$ вместо p подставим $\frac{a}{2}$, а вместо q подставим

$\frac{b}{4}$. Эти значения мы получили, поделив выражение для производной на 4, чтобы свести его к приведённому виду.

Найдём зависимость между коэффициентами и формами графиков многочлена

$$f(x) = x^4 + ax^2 + bx,$$

доказав ряд несложных теорем.

Теорема 3. Форма графика многочлена $x^4 + ax^2 + bx + c$ является главной тогда и только тогда, когда $27b^2 + 8a^3 < 0$.

Доказательство. □ У графиков, чьи формы являются главными, три экстремума, следовательно уравнение $f' = x^3 + \frac{a}{2}x + \frac{b}{4}b = 0$ должно иметь 3 решения. Как было определено в разделе 3 (см. стр. 7), чтобы многочлен вида $x^3 + px + q$ имел 3 решения, должно выполняться следующие условие:

$$27q^2 + 4p^3 < 0.$$

Тогда получим

$$27 \cdot \left(\frac{b}{4}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{27b^2}{16} + \frac{a^3}{2} < 0 \iff 27b^2 + 8a^3 < 0. \blacksquare$$

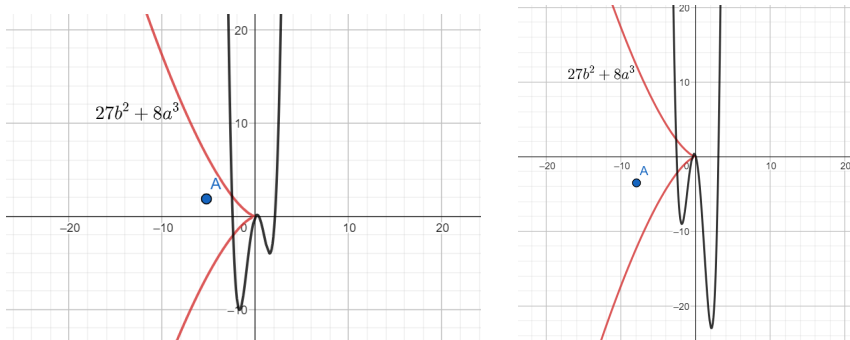


Рис. 3

Теорема 4. Форма графика многочлена $x^4 + ax^2 + bx + c$ является упрощённой тогда и только тогда, когда $27b^2 + 8a^3 > 0$. *Доказательство.* □ У упрощённых форм один экстремум. Для выполнения данного условия нужно, чтобы уравнение $4x^3 + 2ax + b = 0$ имело одно решение. Тогда аналогично теореме 3 из данного условия получим выражение

$$27b^2 + 8a^3 > 0. \blacksquare$$

Добавим, что у упрощённых форм графиков возможно 1 или 2 пересечения с абсциссой в зависимости от свободного члена.

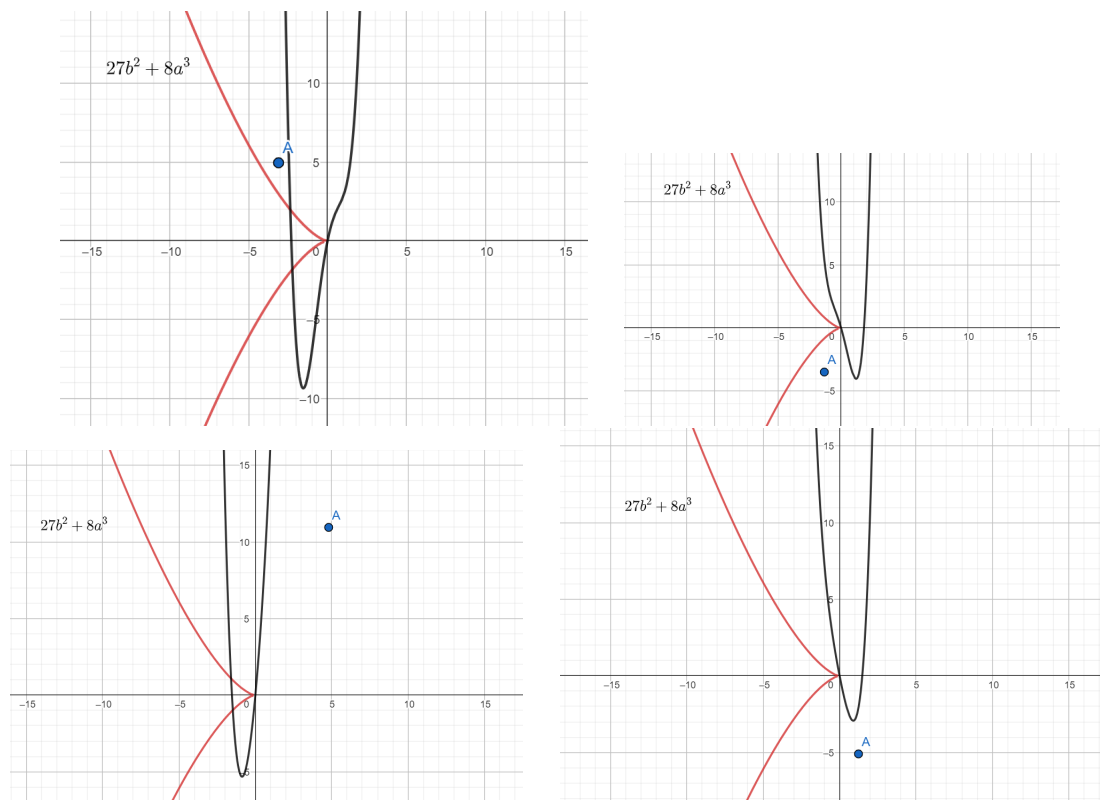


Рис. 4

Также обозначим условия, при которых образуются границы между главными и упрощёнными формами. Так как границы находятся между двумя формами, то и условие их появления тоже находится между, то есть граничащей формой между главными и упрощёнными является график многочлена, для которого верно равенство

$$27b^2 + 8a^3 = 0.$$

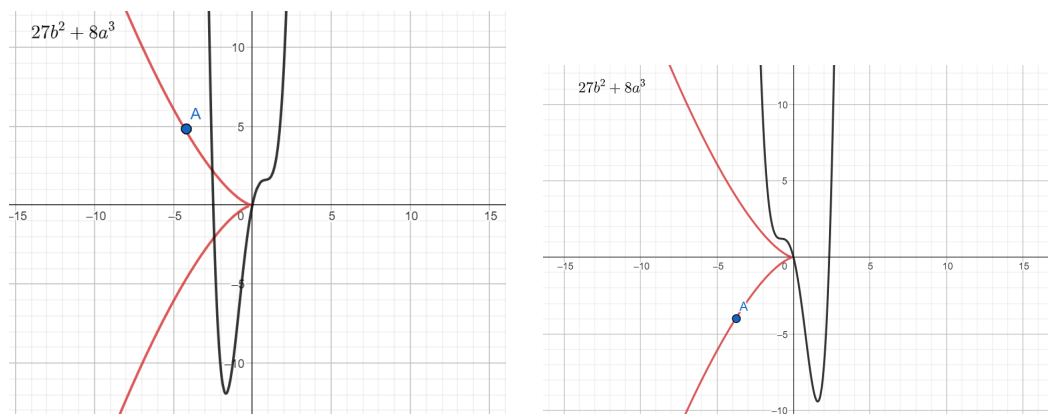


Рис. 5

Границей между двумя главными является график многочлена, у которого $b = 0, a < 0$ (теорема 5).

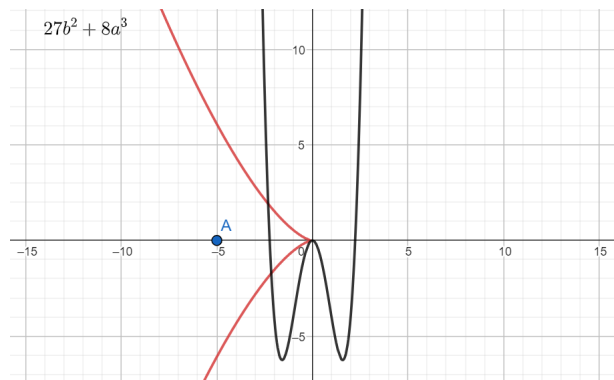


Рис. 6

График - граница между упрощёнными ($a > 0$) является частным случаем предыдущей границы – две ямы сливаются. Поэтому условие появления этой формы графика получим из теоремы 3: данная граница образуется при условии $b = 0, a > 0$.

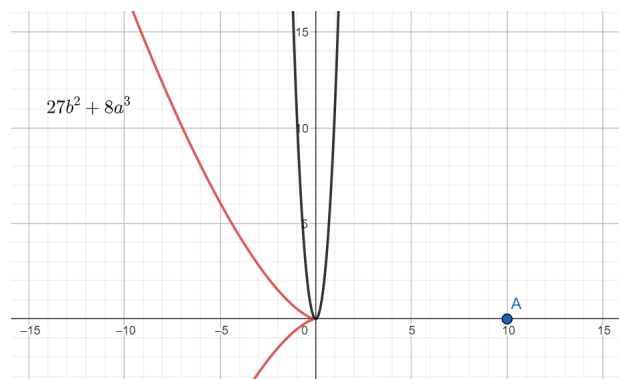


Рис. 7

Для границы между главными и упрощёнными касательная к её перегибу параллельна горизонтальной оси.

Теорема 5. У форм графиков 4.1.1 - 4.2.2 отсутствуют точки перегиба.

Доказательство. □ Заметим, что точки $(a; b)$, определяющие формы графиков 4.1.1 - 4.2.2 и их границу, лежат в полуплоскости, которая задаётся неравенством $a < 0$. Чтобы убедиться, что в графиках, определяемые точкой $(a_1; b_1)$ при условии $a_1 > 0$ нет перегибов, найдём вторую производную многочлена $f' = 4x^3 + 2a_1x + b_1$: $f'' = 12x^2 + 2a_1$. Так как $12x^2 \geq 0$ и $a_1 > 0$, то их сумма положительна. Значит,

у данного вида графиков нет перегибов. ■

Перейдём к формам 4.3.1 и 4.3.2. Точки $(a; b)$ такие, что $a > 0$. Аналогично графикам многочленов 2-й степени, графики форм 4.3.1 и 4.3.2 и график - граница могут пересекать абсциссу 1 или 2 раза. Различие форм заключается в коэффициенте b .

Экспериментальный факт. При $b > 0$ значение a вершины отрицательно, и образуется форма 4.3.1. При $b < 0$ значение a вершины данного графика положительно, а быстрее расширяется левая ветвь, образуется форма 4.3.2.

Граница между данными двумя формами - график с $b = 0$, его вершина находится в точке $(0;0)$, он симметричен относительно оси b .

Учитывая все полученные факты, изобразим распределение вышеперечисленных форм на плоскости (a, b) .

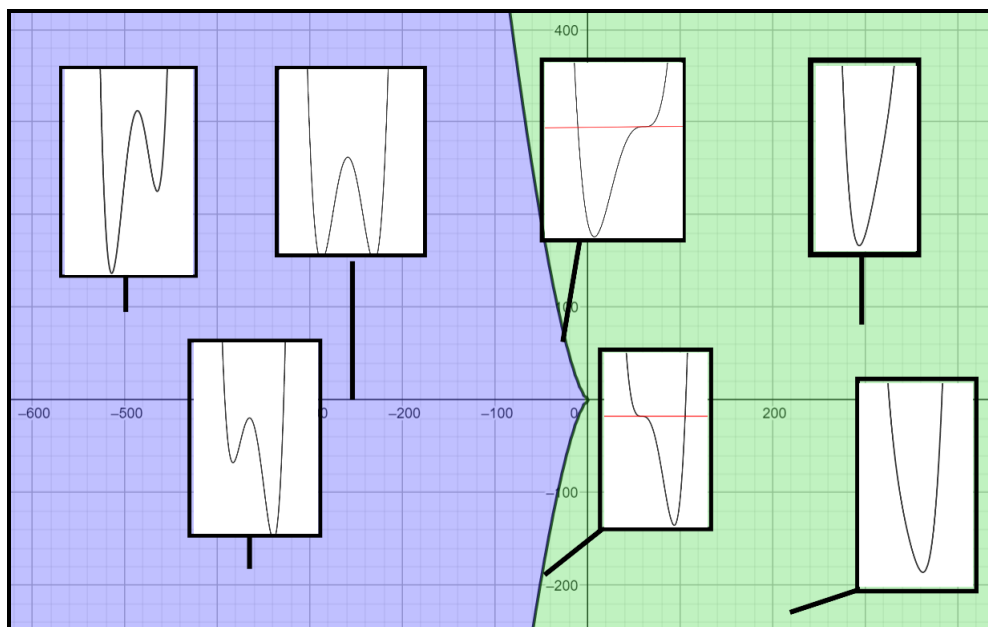


Рис. 8: Распределение форм графиков многочленов 4-й степени

5 Многочлены 5-й степени и их аналоги

5.1 Определение форм

В определении форм графиков многочленов 5-х степеней опустим рассмотрение пограничных форм, а также форм, чьи ямы переходят в перегибы. Найденное количество форм (5) проверяется треугольником Эйлера Бернулли (см. 7.2).

Введём правила обозначения форм графиков. Крайнее число m строки n указывают на количество форм графиков многочлена степени n . Если обозначить вершины графика числами от 1 до n и расположить их в порядке возрастания высот соответствующих вершин по вертикальной оси, то у разных форм будут разные комбинации. При такой классификации графики многочленов с кратными корнями или нулевыми коэффициентами считаются переходной стадией одного вида в другой и не выделяются в отдельную категорию. В графиках многочленов до 4-й степени включительно мы использовали более подробное разделение форм, так как это позволяет небольшое их количество. В данном разделе уже напрямую используются данные из треугольника Эйлера-Бернулли.

Крайнее число пятого ряда $m = 5$. Перечислим эти варианты. В рассматриваемых формах графиков многочленов 5-й степени присутствует 2 вершины и 2 ямы. Обозначим вершины графика слева направо номерами (1) и (3), а ямы - (2) и (4). Введём обозначение для графиков: график задаётся комбинацией цифр от 1 до 4, расположенными в том порядке, в каком находятся значения соответствующих экстремумов по вертикальной оси. Например, если ниже всего находится яма (2), далее идёт яма (4), а после вершины (1) и (3) соответственно, то такую форму будем называть 2413. Всего перестановок 4-х чисел $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Перечислим их:

1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432,
 2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431,
 3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421,
 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321.

Очевидно, что не все комбинации возможны, так как, например, (1) не может быть ниже (2). Аналогично (3) никогда не будет находиться ниже (4) и (2). Поэтому уберём из полученных выше комбинаций те, в которых 1 в названии находится левее 2 или 3 находится левее 4, или 3 находится левее 2. Получим:

2143, 2413, 2431,
 4213, 4231.

Все графики представлены на рис.9 в вышеуказанном порядке слева направо и сверху вниз.

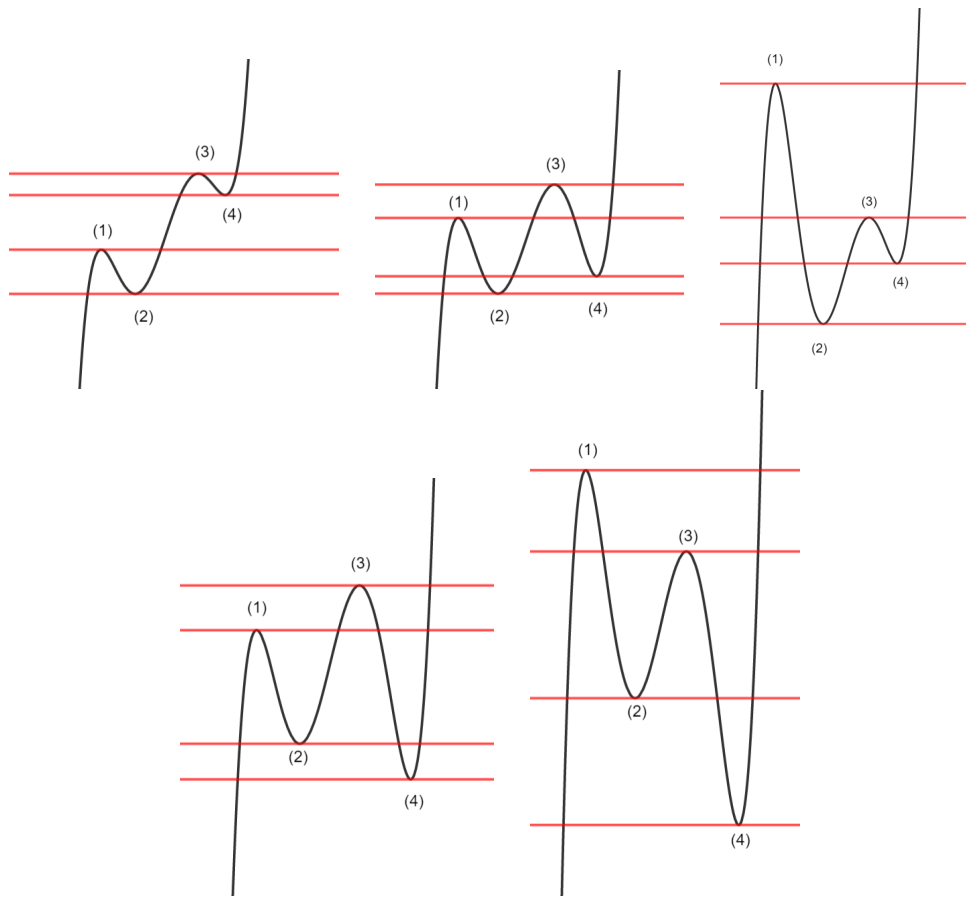


Рис. 9: Формы графиков 5-й степени

У графика формы 2143, в зависимости от значения свободного члена, может быть 1, 2 (в случае наличия кратных корней у многочлена) или 3 пересечения с горизонтальной прямой; у графиков остальных форм: 2413, 2431, 4213, 4231 - от 1 до 5 (2 и 4 в случае наличия кратных корней у многочлена) пересечений. Если не считать случаи, когда у многочлена, соответствующего одной из форм, есть кратные корни, то тогда возможно наличие 1, 3 или 5 корней.

Приведём примеры многочленов, формы графиков которых соответствуют вышеперечисленным:

Если $a = -3, 5, b = -0, 1, c = 4, 1$, то образуется график формы 2143.

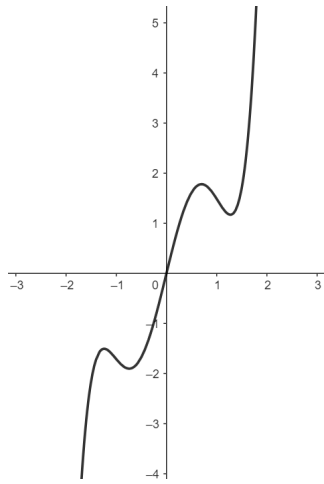


Рис. 10

Если $a = -3, 7, b = 0, 1, c = 3, 3$, то образуется график формы 2413.

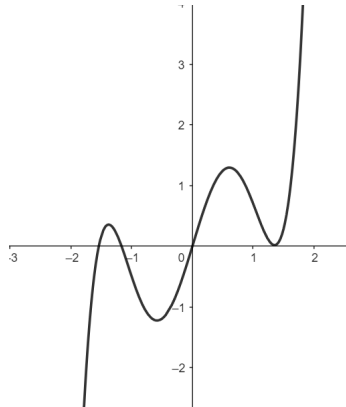


Рис. 11

Если $a = -3, 3, b = 1, c = 2$, то образуется график формы 2431.

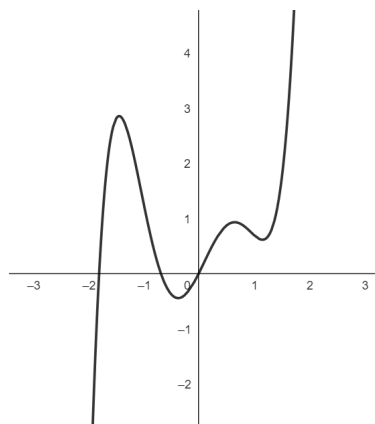


Рис. 12

Если $a = -3, 4, b = -0, 9, c = 2$, то образуется график формы 4213

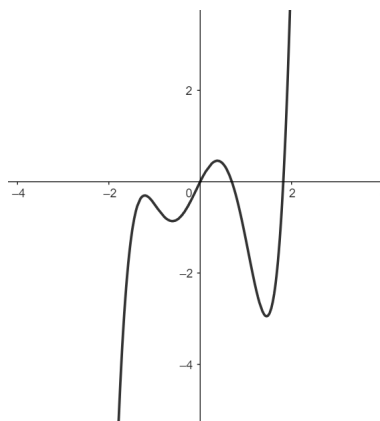


Рис. 13

Если $a = -4, 3, b = 0, 1, c = 2, 9$, то образуется график формы 4231

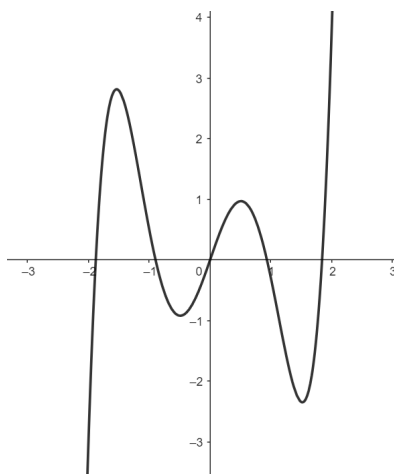


Рис. 14

5.2 Наблюдения

Представим многочлен пятой степени в виде $x^5 + ax^3 + bx^2 + cx$. Меняя значения коэффициентов и наблюдая за формой получаемого графика, получим следующие факты:

- 1) При уменьшении коэффициента a вершина (1) поднимается, становится острее, яма (4) опускается, становится острее.
- 2) При уменьшении коэффициента a вершина (1) и яма (4) поднимаются, скоро пропадают все вершины и ямы.
- 3) Расстояние между (2) и (3) не меняется.
- 4) При уменьшении коэффициента b пропадают (1) и (2), (3) и (4) становятся острее.

5) При увеличении коэффициента b пропадают (3) и (4), (1) и (2) становятся острее.

6) При уменьшении коэффициента c уменьшается расстояние между (2) и (3), все ямы и вершины становятся острее.

7) При $c = 0$ вершины (2) и (3) совпадают и превращаются в перегиб.

8) При увеличении коэффициента c увеличивается расстояние между (2) и (3), постепенно пропадают вершины и ямы, но не так резко, как происходит при увеличении коэффициента b .

Также были обнаружены переходы одной формы графиков в другую.

1) При уменьшении a :

2143 → 2413 → 2431 → 4231,

2143 → 2413 → 4213 → 4231.

В процессе нескольких опытов было замечено, что при различных коэффициентах b и c в цепочке переходов не могут одновременно встретиться формы 2431 и 4231, которые, являются противоположностями друг друга. Это связано с тем, что расстояние от 1 до 2 растёт медленнее, чем от 3 до 4 при уменьшении a , поэтому будет ли в цепочке переходов вид 4213 или 2431 определяют коэффициенты b и c .

2) При уменьшении b : 2431 → 2413 → 4213,

2431 → 4231 → 4213,

2143 → 2413 → 4213.

3) При уменьшении c :

2143 → 2413 → 4213 → 4231,

2143 → 2413 → 2431 → 4231.

Данные цепочки получены экспериментальным путём, других не найдено. Из полученных данных найдём граничащие между собой формы графиков:

2143 граничит только с 2413,

2413 граничит с 2143, 2431, 4213,

2431 граничит с 2413 и 4231,

4213 граничит с 2413, 4231,

4231 граничит с 2431, 4213.

Представим полученную информацию в виде графа:

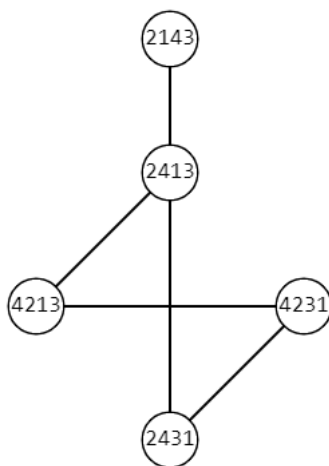


Рис. 15

5.3 Модули. Аналоги графиков 5-й степени

Рассмотрим аналоги графиков 5-й степени, представленные с помощью модулей.

Экспериментальный факт. *Общий вид функций "аналогов" форм 5-х степеней.* $f(x) = x + |x + a| - |x + b| + |x + c| - |x + d|$.

При определённом условии график приобретает форму, похожую на графики многочленов 5-й степени (две вершины, две ямы).

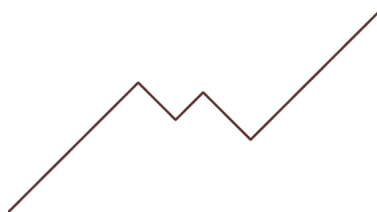


Рис. 16

Сначала разберём функцию проще

$$g(x) = x + |x + a| - |x + b|.$$

Критические точки, точки изломов по оси абсцисс, имеют значения $-a$ и $-b$.

1) Если $a > b$ (рис. 17, в данном случае $a = 5$, $b = 2$), то при $x < -a$ функция возрастает:

$$g(x) = x - x - a + x + b = x - a + b.$$

Далее идёт участок функции, в котором выполняется условие $-a \leq x \leq -b$, тогда функция возрастает, образуется склон:

$$g(x) = x + x + a + x - b = 3x + a - b.$$

При $x > -b$ функция возрастает:

$$g(x) = x + x + a - x + b = x + a + b.$$

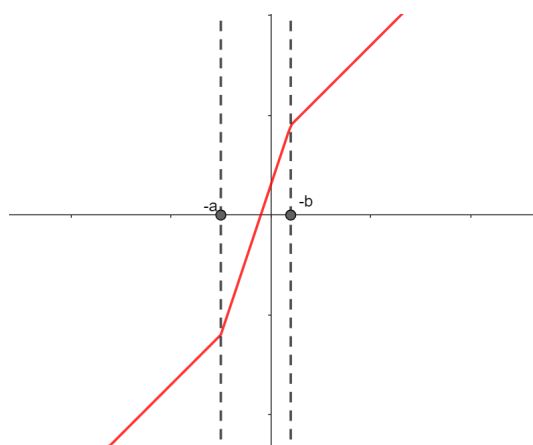


Рис. 17

2) Если $a < b$ (рис. 18, в данном случае $a = 10, b = 3$), то при $x < -b$, функция возрастает:

$$g(x) = x - x - a + x + b = x - a + b.$$

При $-b < x < -a$ функция убывает, образуется вершина. :

$$g(x) = x - x - a - x - b = -x - a - b.$$

При $-a \leq x$, функция возрастает, образуется яма:

$$g(x) = x + x + a - x - b = x + a - b.$$

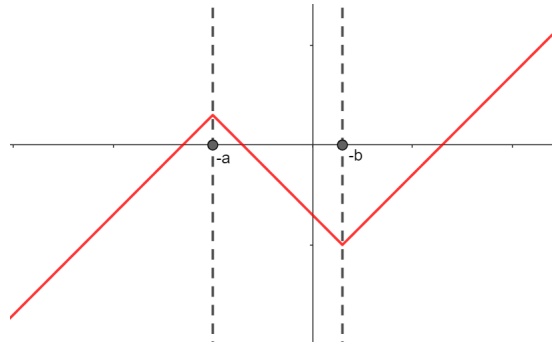


Рис. 18

Таким образом получится чтобы $a > b$, так как $-a < -b$, а, значит, следующий участок на графике, где график - прямая после $x < -a$, $x < -b$, это участок . Как раз на этом участке $-b < x < -a$ выполняется равенство $|x + a| = -(x + a)$, благодаря которому коэффициент перед x равен -1 . Иначе $-|x + b| = x + b$, и коэффициент перед x положителен.

Перейдём к функции $f(x)$. Аналогичными рассуждениями придём к тому, что чтобы график $f(x)$ имел нужную нам форму, нужно чтобы наибольшее значение принимал b или d , причём если b принимает наибольшее, то d должен принимать третье по возрастанию значение. Тогда возможны следующие комбинации (буквы расставлены по возрастанию значений соответствующих коэффициентов): $abcd$, $cbad$, $adcb$, $cdab$.

Обозначим вершины и ямы так же, как это делали для графиков многочленов 5-й степени.

Перечислим формы (рис.19), справа налево, сверху вниз: 2143, 2413, 2431, 4213, 4231.

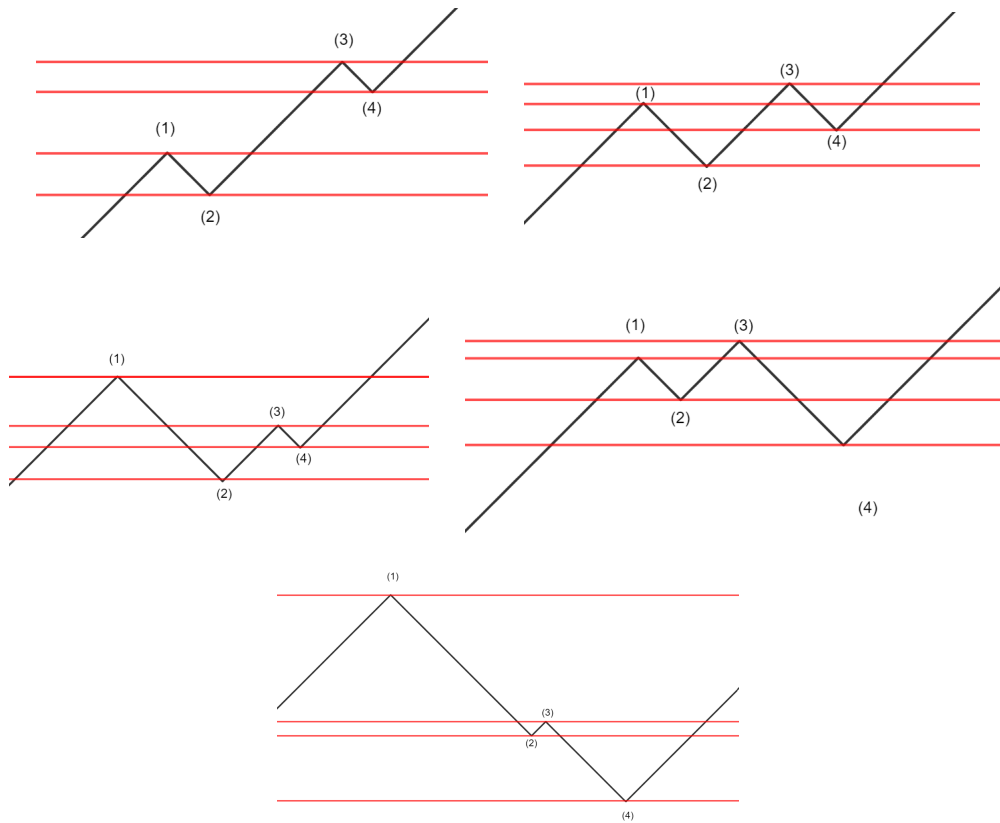


Рис. 19: Аналоги графиков 5-й степени с модулями

Каждая из этих форм реализуется бесконечным количеством функций вида

$$f(x) = x + |x + a| - |x + b| + |x + c| - |x + d|.$$

Приведём примеры:

1) Если $a = 15, b = 20, c = -9, d = -7$, образуется форма 2143.

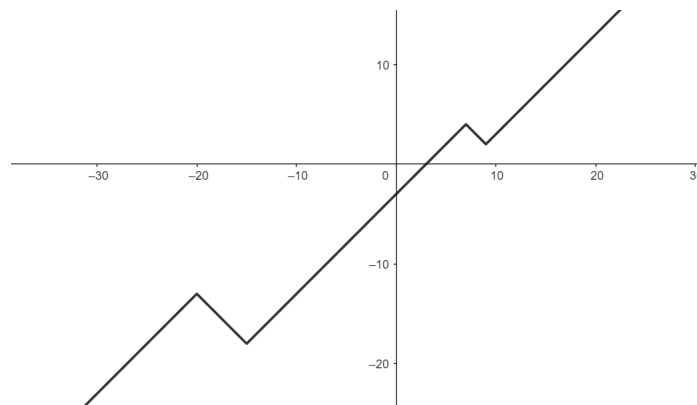


Рис. 20

2) Если $a = 5, b = 17, c = -15, d = -9$, образуется форма 2413.

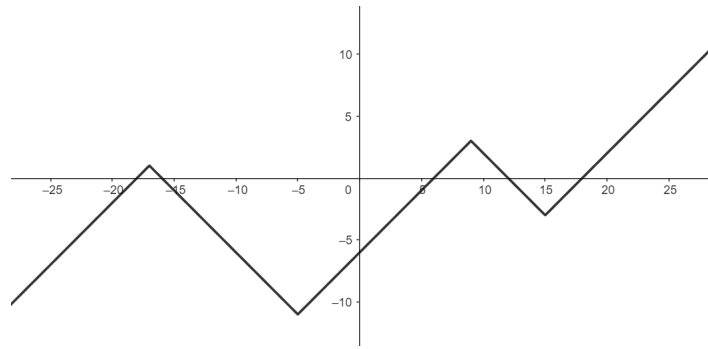


Рис. 21

3) Если $a = 4, b = 20, c = -12, d = -7$, образуется форма 2431.

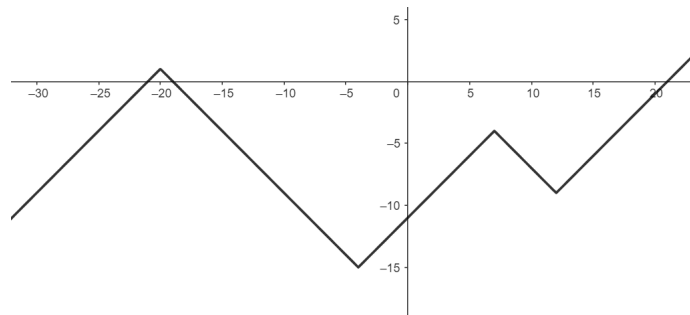


Рис. 22

4) Если $a = 6, b = 9, c = -18, d = -4$, образуется форма 4213.

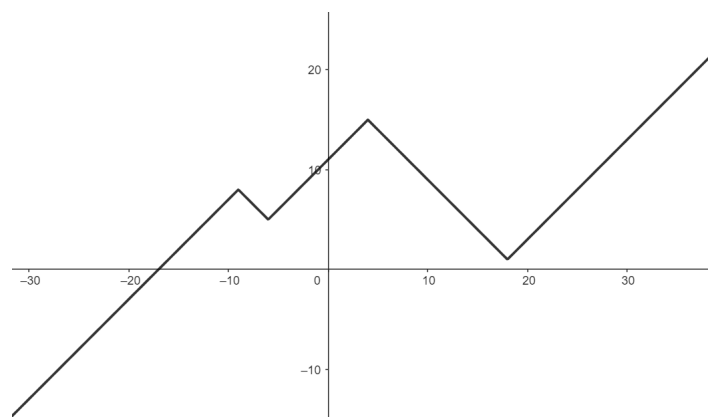


Рис. 23

5) Если $a = -3, b = 12, c = -12, d = -6$, образуется форма 4231.

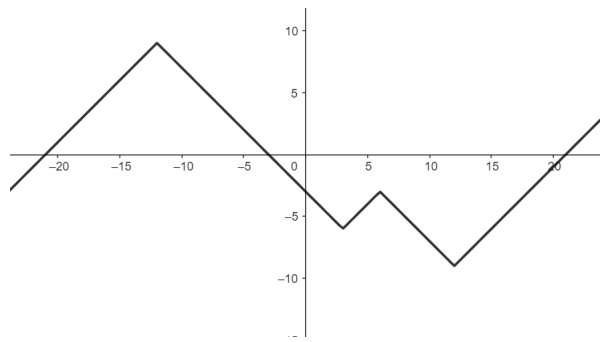


Рис. 24

Заметим, что если мы из каждого коэффициента вычтем одно и то же число, то получим график той же формы, но он будет смещён по диагонали вдоль прямой, являющейся частью графика при $x < x_1$, где x_1 - значение абсциссы вершины (1) (см. рис. 25), чёрным цветом помечен изначальный график, красным - график после вычета из каждого коэффициента одного и того же числа)

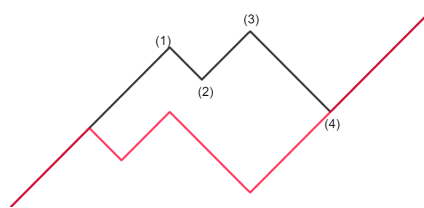


Рис. 25

Стоит отметить, что при любой из возможных комбинаций коэффициентов a, b, c, d реализуется каждая из форм графиков.

6 Заключение

В процессе моего исследования мне удалось стратифицировать многочлены 3-й, 4-й и 5-й степеней, перечислив формы графиков данных степеней и найдя их зависимость от коэффициентов, а также рассмотреть аналоги графиков 5-й степени, полученных с использованием модулей. Гипотеза доказана для графиков вышеуказанных функций с фиксированным количеством участков возрастания и убывания, так как удалось найти условия, при которых образуется каждая из форм, соответствующие многочлены предъявлены (см.рис 3 - 7, рис. 10 - 14, рис. 20 - 24).

Перспективами данного исследования является рассмотрение форм графика-

ков 6-й степени (16 форм), изучение графиков степеней выше 6, а также введение для них новых условных обозначений. Также один из путей развития работы – рассмотрение комплексных пространств – комплексификация, к которой в исследовании на данный момент подойти не удалось. Количество путей будущего развития исследования большое. В том числе своей неисчерпаемостью мне интересна данная область математики, и я планирую продолжать своё исследование.

7 Приложение

7.1 Формула Кардано

Приведём без доказательств:

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Данная формула определена над полем вещественных чисел при условии

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \geq 0 \Leftrightarrow 4p^3 + 27q^2$$

7.2 Треугольник Эйлера-Бернулли

"Алгоритм вычисления треугольника Эйлера-Бернулли состоит в следующем: каждое число в треугольнике равно сумме чисел предшествующего ряда, расположенных левее, если данный горизонтальный ряд состоит из чётного числа элементов, и правее - если из нечётного." [3, с. 7]. Например, посчитаем элементы седьмого ряда. Так как номер ряда нечётный, то будем считать элементы слева направо: левее самого левого элемента в шестом ряду ничего нет, поэтому он равен 0. Обозначим a_{xy} элемент y ряда x . Порядковый номер y считаем слева, при нечётном x и считаем справа при чётном x . Тогда $a_{71} = 0$. Левее второго элемента a_{72} только 16, поэтому $a_{72} = 16$; левее a_{73} в 6 ряду находится 16 и 16, поэтому $a_{73} = 16 + 16$; аналогично $a_{74} = 16 + 16 + 14 = 46$, $a_{75} = 16 + 16 + 14 + 10 = 56$, $a_{76} = 16 + 16 + 14 + 10 + 5 = 61$, $a_{77} = 16 + 16 + 14 + 10 + 5 + 0 = 61$.

Посчитаем количество форм графиков для 8-й степени:

$$a_{82} = 61, a_{83} = 61 + 61 = 122, a_{84} = 61 + 61 + 56 = 178, a_{85} = 61 + 61 + 56 + 46 = 224, a_{86} = 61 + 61 + 56 + 46 + 32 = 256, a_{87} = a_{88} = 61 + 61 + 56 + 46 + 32 + 16 + 0 = 272.$$

$$\text{Для 9-й степени: } a_{91} = 0, a_{92} = 272, a_{93} = 272 + 272 = 544, a_{94} = 544 + 256 = 800, a_{95} = 800 + 224 = 1024, a_{96} = 1024 + 178 = 1202, a_{97} = 1202 + 122 = 1324, a_{98} = a_{99} = 1324 + 61 = 1385.$$

Для подсчёта количества форм 10-й степени не будем рассчитывать каждое число 10-го ряда, так как они требуются для расчёта последующих рядов. Посчитаем количество форм: $a_{1010} = 0 + 272 + 544 + 800 + 1024 + 1202 + 1324 + 1385 + 1385 = 7936$.

Крайнее число t строки n указывают на количество форм графиков с n количеством экстремумов.

Теорема 6. *Крайнее левое число в $(2k + 1)$ -й строке равно количеству форм графиков многочленов степени $2k + 1$, а крайнее правое число $(2k)$ -й строки равно количеству форм графиков многочленов степени $2k$.*

															1															
														0	1	1	0													
													1	1	0															
												0	1	2	2															
											5	5	4	2	2	0														
										0	5	10	14	16	16															
									61	61	56	46	32	16	0															
								0	61	122	178	224	256	272	272															
							1385	1385	1324	1202	1024	800	544	272	0															
						0	1385	2770	4094	5296	6320	7120	7664	7936	7936	0														
					50521	50521	49136	46366	42272	36976	30656	23536	15872	7936	0															
				0	50521	101042	150178	196544	238816	275792	306448	329984	345856	353792	353792	0														
			2702765	2702765	2652244	2551202	2401024	2204480	1965664	1689872	1383424	1053440	707584	353792	0															
		0	2702765	5405530	8057774	10608976	13010000	15214480	17180144	18870016	20253440	21306880	22014464	22368256	22368256	0														
	199360981	199360981	196658216	191252686	183194912	172585936	159575936	144361456	127181312	108311296	88057856	66750976	44736512	22368256	0															

Рис. 26: Треугольник Эйлера-Бернулли до 15 ряда включительно

Разложим сумму тангенса и секанса в ряд Тейлора [3, с.4]: $tg(x) + sec(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{61}{720}x^6 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{277}{8064}x^8 + \frac{62}{2835}x^9 + \frac{50521}{3628800}x^{10} + \dots$

Умножим коэффициент при x n -й степени умножим на $n!$:

$$1 \cdot 1! = 1, \frac{1}{2} \cdot 2! = 1, \frac{1}{3} \cdot 3! = 2, \frac{5}{24} \cdot 4! = 5, \frac{2}{15} \cdot 5! = 16, \frac{61}{720} \cdot 6! = 61, \frac{17}{315} \cdot 7! = 272, \frac{277}{8064} \cdot 8! = 1385, \frac{62}{2835} \cdot 9! = 7936, \frac{50521}{3628800} \cdot 10! = 50521, \dots$$

Заметим, что произведением коэффициента при x n -й степени в разложении $tg(x) + sec(x)$ в ряд Тейлора и $n!$ является количество форм графиков многочленов $(n - 1)$ -й степени.

Список литературы

1. Прасолов В.В. История математики. Часть 1. г. М., 2018.
2. Гиндикин С.Г. Рассказы о физиках и математиках. — 3-е изд., расширенное. М.,2001.
3. Арнольд В. И. Исчисление змей и комбинаторика чисел Бернулли, Эйлера и Спрингера групп Кокстера // Успехи математических наук. 1992. №283.