Таблица количеств разложений чисел на квадраты вида $x^2 + dy^2$

Число считается раскладываемым на квадраты, если оно разложимо по формуле $n = x^2 + dy^2$

Двуквадратные числа — числа, представимые в виде суммы двух точных квадратов (числа вида $n = x^2 + 2y^2$, где $x \in \mathbb{N}$ и $y \in \mathbb{N}$, $d = 1$).

Квадратно-удвоенноквадратные числа — числа, представимые в виде суммы двух точных квадратов, один из которых удвоен (числа вида $n = x^2 + dy^2$, где$x \in \mathbb{N}$ и $y \in \mathbb{N}$, $d = 2$).

Квадратно-утроенноквадратные числа — числа, представимые в виде суммы двух точных квадратов, один из которых утроен (числа вида $n = x^2 + dy^2$, где$x \in \mathbb{N}$ и $y \in \mathbb{N}$, $d = 3$).

Квадратно-упятерённоквадратные числа — числа, представимые в виде суммы двух точных квадратов, один из которых упетярён (числа вида $n = x^2 + dy^2$, где $x \in \mathbb{N}$ и $y \in \mathbb{N}$, $d = 5$).

$\mathrm{r}_2(n)$ — коэффициент при степени q с показателем n в $\Theta(1, n)^2$ ($\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^{2^2}}$).

Алгоритм поиска можно использовать, например, такой: берём n и поочерёдно вычитаем из него квадраты разных x, и проверяем, будет ли квадрат при делении на d.

При рассмотрении $n = x^2 + 2y^2$. Если n чётное, то проверяем квадраты только чётных a. Если n нечётное, то рассматриваем только квадраты нечётных x. y может быть любым.

При рассмотрении $n = x^2 + 3y^2$. Для n кратных 3-м, имеет смысл рассматривать только квадраты x, кратных 3-м. Для n, имеющих остаток 1 при делении на 3, имеет смысл рассматривать только квадраты x, некратных трём. Для n, имеющих остаток 2 при делении на 3, вовсе не имеет смысла рассматривать разложение такого типа.

При рассмотрении $n = x^2 + 5y^2$, исключаем из поиска n, оканчивающиеся на -2,-3, -7,-8, то есть имеющие остаток 2 или 3 при делении на 5.

При n от 0 до 200 замечено, что при разложении на квадраты по четырём формулам получается:

15 чисел — 4 вида разложения на квадраты (Они все являются квадратами других чисел),

9 чисел — 3 вида разложения на квадраты,

64 числа — 2 вида,

76 чисел — 1 вид,

36 чисел — без разложения на какие-либо квадраты.

При этом, если рассматривать общее колличество разложений на квадраты по всем формулам, то видим:

47 чисел — с одним вариантом разложения,

64 числа — с двумя,

25 чисел — с тремя,

13 чисел — с четырьмя,

7 чисел — с пятью,

3 числа — в шестью (9, 100, 169),

2 числа — с семью (36, 144),

1 число — с восьмью (81),

1 число — с девятью вариантами (196).

Ряд чисел от 0 до 200 без единого разложения на сумму квадратов при d=1, 2, 3, 5					
15	55	87	135	155	182
23	60	92	138	158	186
35	62	95	140	159	188
42	71	110	142	165	190
47	77	115	143	167	191
53	78	119	154	168	195

Ряд чисел, имеющих 4 разложения в виде $x^2 + dy^2$, при d=1,2,3,5			
$0 = 0^2$	$16 = 4^2$	$64 = 8^2$	$144 = 12^2$
$1 = 1^2$	$25 = 5^2$	$81 = 9^2$	$169 = 13^2$
$4 = 2^2$	$36 = 6^2$	$100 = 10^2$	$196 = 14^2$
$9 = 3^2$	$49 = 7^2$	$121 = 11^2$	

(Квадрат 15 лежит за пределами рассматриваемого диапозона.)

Но если исключить варианты разложения при $y = 0$, то останутся числа, которые являются квадратами чисел, от 2 до 14, но они уже не раскладываются по всем четырём видам формул, а имеют разложение от одной до трёх формул.

Ряд квадратов, имеющих представление $x^2 + dy^2$, при $y \neq 0$, d=1,2,3,5			
n	x	d	y
4	1	3	1
9	1	2	2
	2	5	1
16	2	3	2
25	3	1	4
36	2	2	4
	3	3	3
	4	5	2
49	1	3	4
	2	5	3
64	4	3	4
81	3	2	6
	7	2	4
	1	5	4
	5	5	3
100	6	1	8
	5	3	5
121	7	2	6
144	4	2	8
	6	3	6
	8	5	4
169	5	1	12
	11	3	4
196	2	3	8
	7	3	7
	11	3	5
	13	3	3
	4	5	6

Для простых чисел от 0 до 200.
$x^2 + dy^2$, при $y \neq 0$, d=1,2,3,5

При рассмотрении данных оказывается, что у каждого n для каждого вида разложений есть либо 0, либо только 1 вариант. Количество способов разложений у простых чисел совпадает с количеством вариантов разложений.

Ни одно простое число в диапазоне от 0 до 200 сразу по всем четырём формулам не раскладывается.

И всего 9 чисел раскладывается при $d = 5$ — это 5, 29, 41, 61, 89, 101, 109, 149, 181.

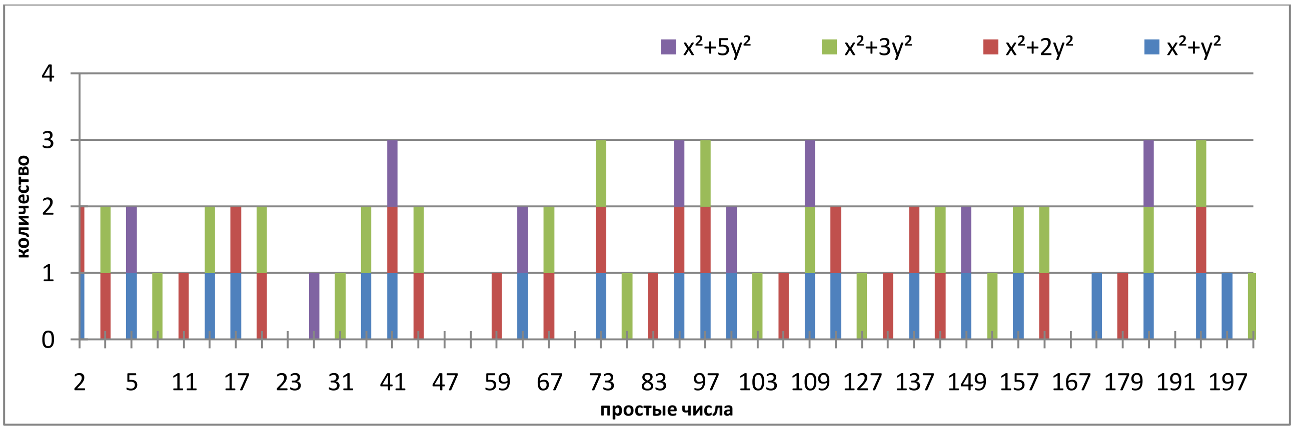
n = 23, 47, 53, 71, 167, 191 — разложений нет вовсе.

1 вариант разложения на квадраты у 16 чисел

2 варианта — у 17 чисел,

3 варианта — у 7 чисел.

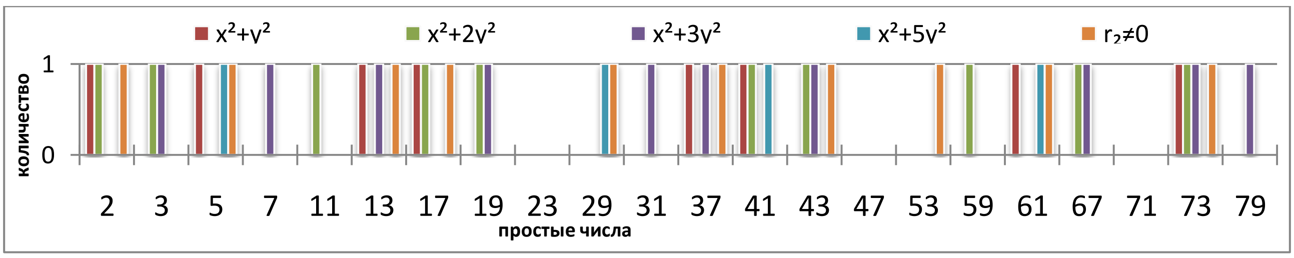
Разложение простых чисел на $x^2 + dy^2$, при $y \neq 0$, d=1,2,3,5



Разложение постых чисел на квадраты (до 79) и тета-функция.

Поскольку, тета-функция для простого числа 2 имеет значение 1, а для всех остальных простых чисел 0 или 2, то в диаграмме значение 0 обозначает значение 0, а значение 1 обозначает любое другое значение, для наглядности.

Разложение простых чисел от 0 до 79 на $x^2 + dy^2$, при $y \neq 0$, d=1,2,3,5 и наличие r_2 (при $r_2 \neq 0$) для того же n



Гипотеза:

Если простое число имеет остаток от деления на 4, равный 1, то тета-функция равна 2, если — остаток 2, то она равна 1, а если остаток 3, то — 0, остаток 0 быть не может».

Степени двойки (до 11 степени).

Разложение на квадраты ($n = x^2 + dy^2, y \neq 0$)

Если рассматривать варианты, где $y \neq 0$, то нет разложений вида $n = x^2 + dy^2$, при $d = 5$

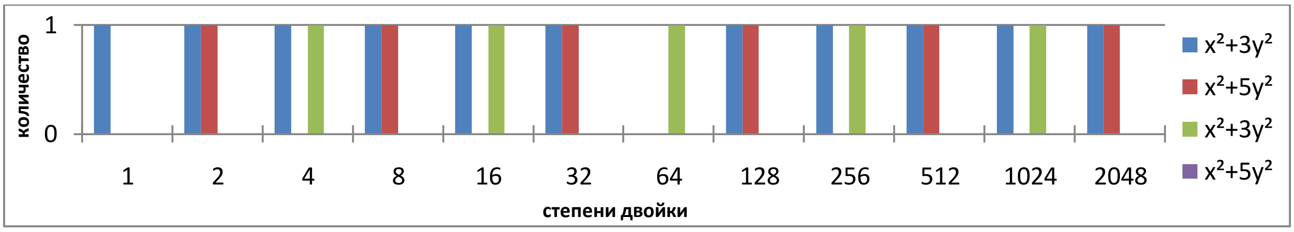
При $d = 1$, на квадраты раскладываются все числа, кроме 64.

При $d = 2$ — только нечётные степени двойки.

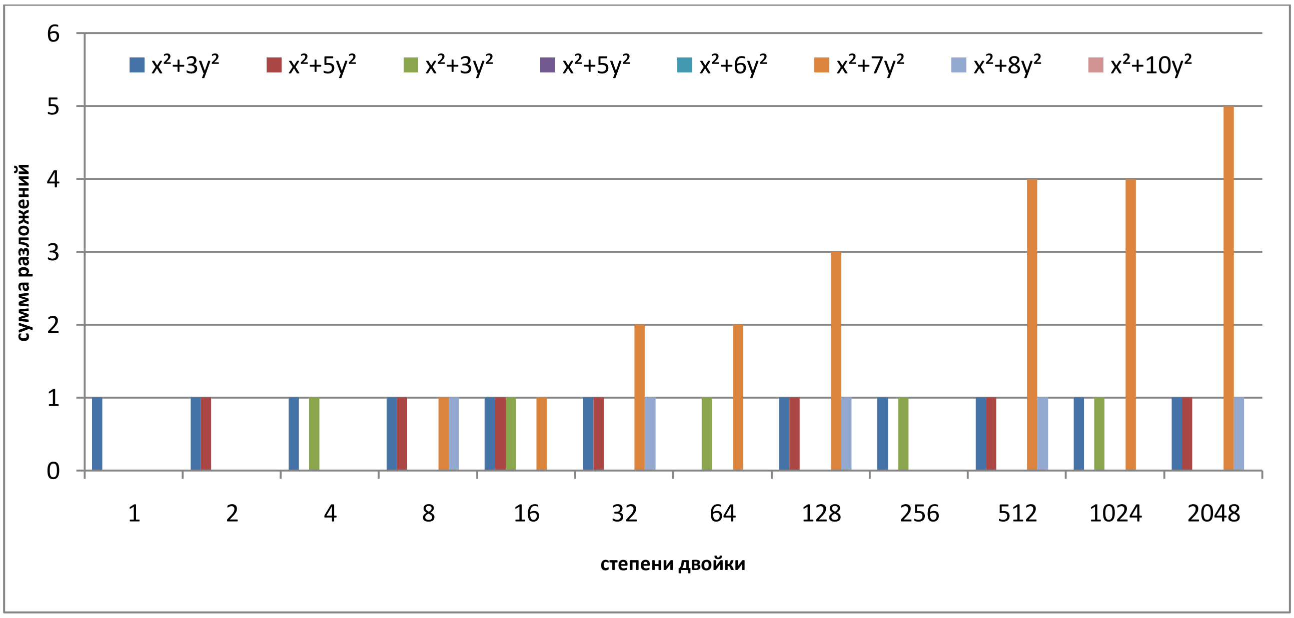
При $d = 3$ — только чётные степени двойки.

При $d = 5$ — разложений нет.

Разложение на сумму квадратов $n = x^2 + dy^2$, n = 2^z (z от 0 до 11), $y \neq 0$, d=1, 2, 3, 5



Общее количество представлений чисел 2^z (z от 0 до 11) по формуле $x^2 + dy^2, y \neq 0$, d=1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10



При $d = 6, d = 10$ тоже 0 вариантов,

при $d = 7$ видим от 1 до 5 вариантов разложения, начиная с 2^3

при $d = 8$ — только нечётные степени двойки.