19.4.10 / 19.5.31

Числа, представимые, в виде суммы 2-х точных квадратов

Всеволод Светлаков

0. Оглавление

1. Предисловие и важные данные из связанных тем

Данная тема мне была навеяна статьёй (Шабат, и др., 2009), также оттуда была взята терминология.

1.0. Определения

1.01. Числа, представимые в виде суммы двух точных квадратов (числа вида $a^2 + b^2$, где $a \in \mathbb{N}$ и $b \in \mathbb{N}$) будем называть *двуквадратными*.

1.02. *Целые точки* — точки, у которых все координаты в декартовой системе координат (абсцисса, ордината, аппликата и так далее).

1.03. *Функция Эрхарта* от k для некоторой фигуры D — количество целых точек после применения гомотетии с коэффициентом k и центром в целой точке для некоторой фигуры[1]. Также она в тексте обозначается $\mathrm{Ehr}_D(k)$.

1.04. P_n — правильный n-угольник с центром в точке $(0{,}0)$, ∞-угольник — это круг.

1.05. $\mathrm{r}_2(m)$ будем называть коэффициент при степени q с показателем m в $\boxed{\Theta(1,q)^2 := \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2}\right)^2}$.

1.1. Связанные темы

1.1.0. Функции Эрхарта

Теорема 1. Имеет место следующая формула:

$$\boxed{\mathrm{Ehr}_{P_\infty}(k) = \sum_{n=-k}^{k} \left(2\left\lfloor\sqrt{k^2 - n^2}\right\rfloor + 1\right)}$$

Доказательство: Данная формула представляет суммирование целых точек (см. 1.02) по строкам (горизонтальные линии с целой ординатой, параллельные абсциссе) внутри P_∞ (см. 1.04). В каждой строке количество целых точек высчитывается по Теореме Пифагора: ищется край через прямоугольный треугольник с вершинами на пересечении абсциссы и ординаты, на пересечении ординаты и этой строки и на пересечении этой строки и границы этого круга, у него известна гипотенуза, равная радиусу, и тот катет, который идёт по ординате до этой строки (его длина равна номеру строки). Потом округляется вниз, удваивается (есть и отрицательное направление) и прибавляется точка на ординате.

1.1.0.0. Как эта тема связана с двуквадратными числами?

$\mathrm{Ehr}_{\mathrm{P}_\infty}(r)$ — является количество разложений[2] чисел от 0 до r^2, в частности, количество целых точек (см. 1.01) на окружности с радиусом, равным $\sqrt{r}$, равно количеству разложений[3] r в виде суммы 2-х квадратов.

---

[1] Здесь и далее обычно граница фигуры принадлежит ей, если не указанно иное.

[2] Разложения с разными знаками у чисел, возводимых в квадрат или разным порядком слагаемых, считаются одним разложением

[3] Здесь важны и знаки и порядок слагаемых либо взять сектор плоскости равный $\frac{1}{8}$ от точки $(0{,}0)$ (но, ни в коем случае $\frac{1}{8}$ точки!)

2. Количество разложений числа в виде суммы двух квадратов

2.0. Среднее количество разложений чисел от 0 до n

Среднее арифметическое количеств разложений чисел от 0 до n обозначает, сколько в среднем будет разложений у произвольного целого числа от 0 до n.

$\#\{(x,y)|x,y \in \mathbb{N}|x \leq y|x^2+y^2=n\}$ — количество разложений.

$\#\{(x,y)|x,y \in \mathbb{N}|x^2+y^2=n\}$ — количество разложений с порядком

n	**Количество разложений**	**Количество разложений с порядком**
10^1	$0,(72)$	$1,(18)$
149	$0,(40125987)$	$0,(79542045)$
10^3	0,94(6)	0,88(6)
10^4	$0,(420579)$	$0,(81)$

График второго столбца от первого получается похожим на гиперболу.

2.1. Количество разложений натуральных чисел $n = x^2 + y^2$

Абсцисса обозначает n.

Числа 25, 50, 65 имеют по два разложения ($25 = 3^2 + 4^2 = 5^2 + 0^2$, $50 = 5^2 + 5^2 = 1^2 + 7^2$, $65 = 1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2$). Остальные — по одному или не имеют. У 25 большое количество разложений связано с тем, что оно участвует в Пифагоровой тройке.

2.2. Гипотеза для простых чисел

В статье (Мерзон, 2014) была следующая таблица:

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
+	−	+	−	+	−	+	−	+	−

Наблюдение 1:

1. если число имеет остаток от деления на 4 равный 1, то оно — двуквадратное (см. 0.01),
2. если же остаток равен 3, то оно — не двуквадратное.

Доказательство второй части наблюдения.

Посмотрим, какие остатки от деления на 4 дают числа

$n \bmod 4$	0	1	2	3
$n^2 \bmod 4$	0	1	0	1

Теперь будем складывать остатки квадратов

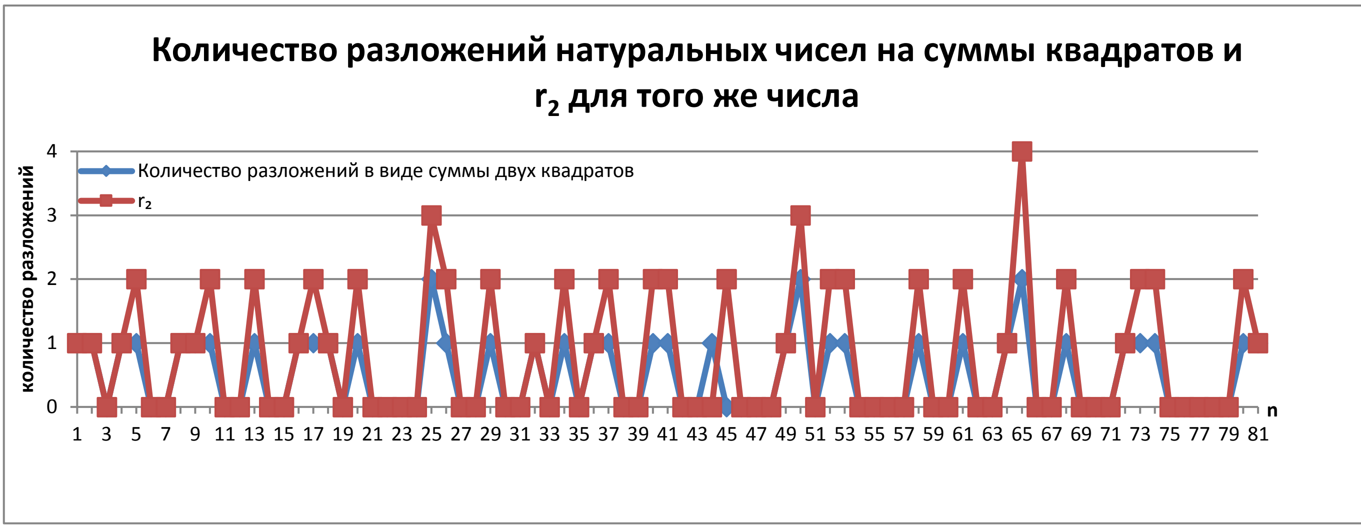
	0	**1**
0	0	1
1	0	2

Могут получиться остатки 0, 1 и 2, а остаток 3 получиться не может. Quod erat demonstrandum[4].

А вот с доказательством представимости чисел с остатком 1 сложнее. Оказывается, что уже следующее число (21) — не двуквадратное. Но на проверку оказывается, что все не представимые числа с остатком 1 до $2 \cdot 10^2$ являются составными (между прочим, в изначальной формулировке вопроса про то, какие числа — двуквадратны, участвовали именно простые числа[5]).

2.3. Связь с $\mathrm{r}_2(n)$

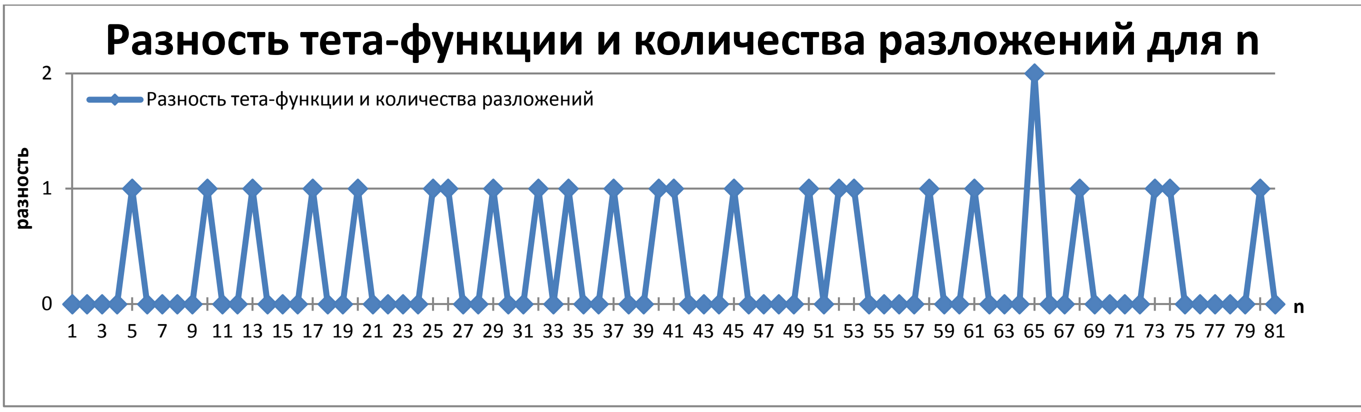
Если построить график $r_2(n)$ (см. 1.05), то он поначалу будет похож на график количеств разложений для натуральных чисел, но потом появятся расхождения.



При построении графика расхождений количества разложений $n = x^2 + y^2$ (n — натуральное число) и $r_2(n)$, у меня возникла гипотеза: «Разность графиков составляет количество встреч в факторизации разных простых чисел с остатком от деления на 4 равным 1. Простой множитель 2 считатается, только если кроме неё нет никаких простых чисел, описанных в предыдущем предположении. При этом простые числа с остатком от деления на 4 равным 3 должны отсутствовать в факторизации».

[4] Что и требовалось доказать *(лат.)*.

[5] Добавлю, что простые числа могут иметь все упомянутые остатки, а также остаток 2, остаток же 0 быть не может. Но количество простых чисел с остатком 2 конечно (только 2) и все они представимы.



Эта гипотеза объясняет составной характер всех чисел, которые не подходят под предыдущую гипотезу (см. стр. 4).

3. Список литературы

Cox David A. Primes of the form $x^2 + ny^2$ [Book]. — Hoboken : John Wiley & Sons, Inc., 2013. — ISBN 978-1-118-39018-4.

Мерзон Григорий Александрович Косые квадраты и теорема Пифагора [В Интернете] // МЦНМО. — 30 Октября 2014 г.

Спивак Александр Васильевич Крылатый квадрат [В Интернете] // МММФ.

Шабат Георгий Борисович [и др.] Двуквадратные числа [Журнал] // Полином. — Москва, 2009 г. — 3. — стр. 53—62. — ФС77-34064.