

# Змеевидные Последовательности

0. Определение .....	1
1. Примеры .....	1
2. Числа ряда Фибоначчи-Фарея .....	2
3. Первые десять по порядку .....	3
4. Обобщение.....	3
5. Похожий пример.....	4

## 0. Определение

*Змеевидные последовательности* – это последовательности дробей, в которых

знаменатель каждой дроби совпадает с числителем следующей (*тип* знаменатель-числитель), или же числитель каждой дроби равен знаменателю следующей (*тип* числитель-знаменатель).

Замечание. У некоторых змеевидных последовательностей существуют интересные *пределы*.

## 1. Примеры

### 1.1.«Золотая» последовательность

Рядом [Фибоначчи](#) называется ряд, который начинается с 1,2 и в котором каждое следующее число является суммой двух предыдущих: (1,2,3,5,8,13,21,34,55,89...).

Последовательность отношения соседних чисел ряда Фибоначчи.

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \frac{89}{55}, \dots$$

1) Имеется змеевидное явление (по определению).

2) Последовательность стремится к некоторому пределу, который называется *золотым сечением*. См. конец текста.

### 1.2. Ряд Фибоначчи-Фарея.

Медиантой двух несократимых дробей с положительными знаменателями называется дробь, числитель которой равен сумме числителей, а знаменатель — сумме знаменателей данных дробей.

**Формула:**

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} := \frac{a+c}{b+d}$$

$\oplus$ - знак вычисления медианты.

Члены ряда Фибоначчи-Фарея формируются по принципу:

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d}, \frac{c}{d} \oplus \left( \frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} \right), \frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} \oplus \left( \frac{c}{d} \oplus \frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} \right), \\ \left( \frac{c}{d} \oplus \left( \frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} \right) \oplus \left( \frac{a+c}{b+d} \oplus \left( \frac{c}{d} \oplus \frac{a+c}{b+d} \right) \right) \right), \dots$$

Иначе говоря:

$$z_0 := \frac{a}{b} \\ z_1 := \frac{c}{d} \\ z_2 := z_0 \oplus z_1 \\ z_3 := z_1 \oplus z_2 \\ \dots$$

Общая формула чисел ряда Фибоначчи-Фарея:

$$z_n := z_{n-1} \oplus z_{n-2}$$

## 2. Числа ряда Фибоначчи-Фарея

Вычисляем (с помощью программы Maple) первые 20 чисел ряда при  $z_0 = 0$ ,  $z_1 = \frac{1}{2}$ .

	$z_6 := \frac{8}{21}$	$z_{11} := \frac{89}{233}$	$z_{16} := \frac{987}{2584}$
$z_2 := \frac{1}{3}$	$z_7 := \frac{13}{34}$	$z_{12} := \frac{144}{377}$	$z_{17} := \frac{1597}{4181}$
$z_3 := \frac{2}{5}$	$z_8 := \frac{21}{55}$	$z_{13} := \frac{233}{610}$	$z_{18} := \frac{2584}{6765}$
$z_4 := \frac{3}{8}$	$z_9 := \frac{34}{89}$	$z_{14} := \frac{377}{987}$	$z_{19} := \frac{4181}{10946}$
$z_5 := \frac{5}{13}$	$z_{10} := \frac{55}{144}$	$z_{15} := \frac{610}{1597}$	$z_{20} := \frac{6765}{17711}$

Интересные наблюдения связаны с упорядочиванием этой последовательности дробей.

### 3. Первые десять по порядку

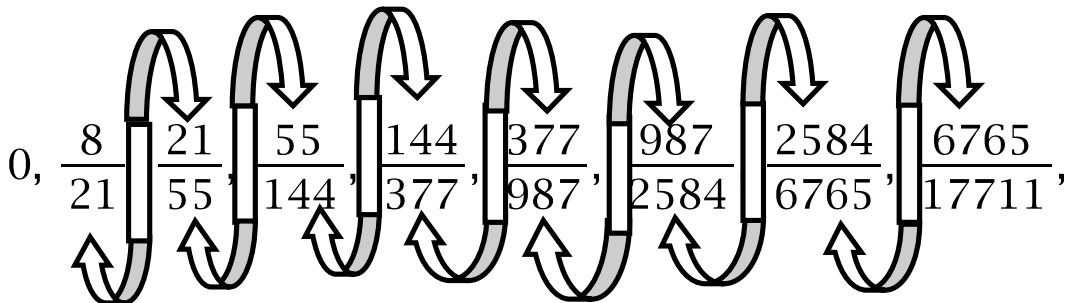
**Главное наблюдение.** При расположении по возрастанию первых десяти чисел (кроме крайних) ряда Фибоначчи-Фарея получающаяся последовательность оказывается змеевидной!

$$\left[ 0, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{8}{21}, \frac{21}{55}, \frac{55}{144}, \frac{89}{233}, \frac{34}{89}, \frac{13}{34}, \frac{5}{13}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2} \right]$$

В середине тип змеевидности меняется с типа *знаменатель-числитель* на тип *числитель-знаменатель*.

### 4. Обобщение

То же явление наблюдается и на более длинных отрезках ряда:



### 5. Похожий пример: «золотая последовательность»

*Цепной, или непрерывной дробью* называется выражение вида

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

Простейший пример такой дроби получается при  $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = 1$ :

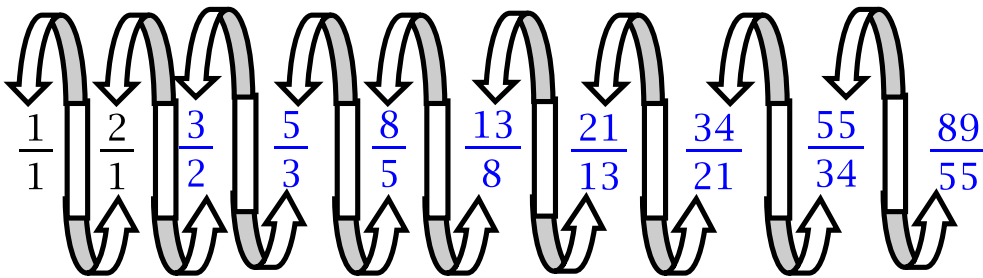
$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

Вычислим 20 чисел данного ряда:

$$1 \quad 2 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{8}{5} \quad \frac{13}{8} \quad \frac{21}{13} \quad \frac{34}{21} \quad \frac{55}{34} \quad \frac{89}{55}$$

$$\frac{144}{89} \quad \frac{233}{144} \quad \frac{377}{233} \quad \frac{610}{377} \quad \frac{987}{610} \quad \frac{1597}{987} \quad \frac{2584}{1597} \quad \frac{4181}{2584} \quad \frac{6765}{4181} \quad .$$

Эта последовательность, очевидно, змеевидна:



Её числители и знаменатели образуют ряд Фибоначчи: если ввести обозначение

$$F_k = \frac{M_k}{N_k},$$

то

$$N_k + M_k = N_{k+1}$$

Действительно,  $1+1 = 2$ ,  $2+1 = 3$ ,  $3+2 = 5$ ,  $5+3 = 8$ , ... .

Вот приближённые значения отношений соседних чисел Фибоначчи:

$$1 = 1.$$

$$2 = 2.$$

$$\frac{3}{2} = 1.500000000$$

$$\frac{5}{3} = 1.666666667$$

$$\frac{8}{5} = 1.600000000$$

$$\frac{13}{8} = 1.625000000$$

$$\frac{21}{13} = 1.615384615$$

$$\frac{34}{21} = 1.619047619$$

$$\frac{55}{34} = 1.617647059$$

$$\frac{89}{55} = 1.618181818$$

$$\frac{144}{89} = 1.617977528$$

$$\frac{233}{144} = 1.618055556$$

$$\frac{377}{233} = 1.618025751$$

$$\frac{610}{377} = 1.618037135$$

$$\frac{987}{610} = 1.618032787$$

$$\frac{1597}{987} = 1.618034448$$

$$\frac{2584}{1597} = 1.618033813$$

$$\frac{4181}{2584} = 1.618034056$$

$$\frac{6765}{4181} = 1.618033963$$

Они, очевидно, стремятся к пределу, который называется *золотое сечение* и будет мной изучен.