14.11.24/ 16.8.28

Вейц Александр Арсеньевич

Последовательности Фибоначчи-Фарея

1. Операции и последовательности 1
2. Обобщённые последовательности Фибоначчи 2
3. Медианта 2
4. Последовательности Фибоначчи-Фарея 3
5. Заключение 8

1. Операции и последовательности

1.0. Определение. Говорят, что на некотором множестве X задана *операция* $*$, если для любых элементов $x, y \in X$ определён элемент

$$x * y \in X.$$

В работе в качестве * будет рассматриваться и обычная операция сложения $+$ на множестве рациональных чисел, и другая операция $\oplus$ на множестве <u>положительных</u> рациональных чисел.

1.1. Определение. Сопоставление любому натуральному числу n элемента $x_n \in X$ называется *последовательностью* (элементов множества X).

Последовательность часто записывается в виде

$$x_0, x_1, x_2, \ldots,$$

причём $x_0, x_1, x_2, \ldots,$ называются *членами* последовательности.

Последовательность – это не просто *множество* элементов множества $x_0, x_1, x_2, \ldots, \in X$, поскольку члены последовательности могут <u>повторяться</u>. Например,

$$7, 7, 7, 7, \ldots$$

– последовательность натуральных чисел. В ней $x_0 = 7$, и $x_1 = 7$ и, например, $x_{2016} = 7$.

Некоторые последовательности имеют специальные имена. Пример такой последовательности натуральных чисел –

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

– *последовательность Фибоначчи*, определяемая тем, что в ней каждый член, начиная с 2, является суммой двух предыдущих. Эта последовательность была в 1202 году введена Леонардо Пизанским (1180-1240), который вошёл в историю под именем Фибоначчи. Последовательность Фибоначчи во "взрослых" обозначениях определяется формулой

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n,$$

которая должна быть дополнена *начальными условиями*

$$x_0 = x_1 = 1.$$

Нетрудно вычислить, что $x_2 = 2, x_3 = 3$ и, например, $x_7 = 21$.

2. Обобщённые последовательности Фибоначчи

На любом множестве X с операцией $*$ *обобщённая последовательность Фибоначчи* определяется формулой

$$x_{n+2} = x_{n+1} * x_n,$$

вместе с какими-либо начальными условиями. Например, обобщённая последовательность Фибоначчи на множестве натуральных чисел с операцией *умножения* и начальными условиями $x_0 = 1, x_1 = 2$ имеет вид

$$1, 2, 2, 4, 8, 32, 256, \dots .$$

3. Медианта

Для неотрицательных несократимых дробей $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ определим их *медианту*

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+b}{c+d}.$$

Все дроби предполагаются сокращёнными. Например,

$$\frac{1}{3} \oplus \frac{5}{7} = \frac{3}{5},$$

$$\frac{1}{4} \oplus \frac{2}{5} = \frac{1}{3}.$$

Операция $\oplus$ не похожа на обычное сложение, но интересна. Очевидно, от перемены мест "слагаемых" сумма не меняется, то есть

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \oplus \frac{a}{b}.$$

Можно доказать, что если $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$, то

$$\frac{a}{b} \leq \frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} \leq \frac{c}{d}.$$

4. Последовательности Фибоначчи-Фарея

Так будут называться обобщенные последовательности Фибоначчи, построенные по операции $\oplus$ на множестве неотрицательных дробей. Иначе говоря,

$$|\overline{\underline{x_{n+2} = x_{n+1} \oplus x_n}}|$$

По определению, ряд начинается с чисел

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{a+c}{b+d}, \frac{c}{d} \oplus \frac{a+c}{b+d}, \ldots$$

Мы рассмотрим две последовательности Фибоначи-Фарея: с начальными условиями $x_0 = \frac{1}{1}, x_1 = \frac{2}{1}$ и с начальными условиями $x_0 = \frac{0}{1}, x_1 = \frac{1}{2}$. Назовём их КЛАССИЧЕСКАЯ и НОВАЯ.

4.1. Классическая последовательность Фибоначчи-Фарея. Нетрудно вычислить начальные члены этой последовательности:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \frac{89}{35}, \ldots$$

Отметим её интересные свойства.

(а) Числитель каждой дроби совпадает со знаменателем следующей.
(б) И числители, и знаменатели образуют классическую последовательность Фибоначчи.
(в) Можно заметить, что

$$\frac{1}{1} = 1,$$

$$\frac{2}{1} = 1 + \frac{1}{1},$$

$$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}},$$

$$\frac{5}{3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}}},$$
$$\frac{8}{5} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}},$$
$$\frac{13}{8} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}}$$

и так далее.
(г) Приближённые значения членов классческой последовательности Фибоначчи-Фарея таковы:

$$\frac{1}{1} = 1,$$
$$\frac{2}{1} = 2,$$
$$\frac{3}{2} = \mathbf{1}.5,$$
$$\frac{5}{3} = \mathbf{1.6}66666\ldots,$$
$$\frac{8}{5} = \mathbf{1.6},$$
$$\frac{13}{8} = \mathbf{1.6}25$$
$$\frac{21}{13} = \mathbf{1.61}5384\ldots$$
$$\frac{34}{21} = \mathbf{1.61}9047\ldots$$
$$\frac{55}{34} = \mathbf{1.61}7647\ldots$$
$$\frac{89}{55} = \mathbf{1.618}181\ldots$$
$$\frac{144}{89} = \mathbf{1.61}7977\ldots$$
$$\frac{233}{144} = \mathbf{1.6180}55\ldots$$
$$\frac{377}{233} = \mathbf{1.6180}25\ldots$$
$$\frac{610}{377} = \mathbf{1.6180}37\ldots$$

Жирным выделены *стабилизирующиеся* знаки: последовательность *стремится* к некоторому числу.

Это число можно угадать. Если представить себе *бесконечноэтажную* дробь

$$X = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}},$$

(обратите внимание на многоточие!), то можно предположить, что

$$X = 1 + \frac{1}{X}:$$

действительно, под самой верхней единичкой в числителе правой части стоит "та же самая" бесконечноэтажная дробь. Корни получившегося квадратного уравнения $X^2 - X - 1 = 0$ – числа $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Положительное из них

$$X = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \mathbf{1.61803}3988749894848204586834365638117720309 2\dots$$

называется *золотым сечением*. Это число рассматривал ещё Евклид. Ему посвящена огромная литература, и много материала можно найти в Интернете.

4.2. Новая последовательность Фибоначчи-Фарея. Напомним, теперь

$$x_0 = \frac{0}{1}, x_1 = \frac{1}{2}$$

и по-прежнему

$$\boxed{x_{n+2} = x_{n+1} \oplus x_n}$$

при всех $n = 0, 1, 2, \dots$. Получим

$$x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = \frac{2}{5}, x_4 = \frac{3}{8}, x_5 = \frac{5}{13}, x_6 = \frac{8}{21}, x_7 = \frac{13}{34}, x_8 = \frac{21}{55}, \dots$$

Вот приближённые значения этих чисел:

$$\frac{1}{2} = \mathbf{0}.5$$

$$\frac{1}{3} = \mathbf{0.3}33333\dots$$

$$\frac{2}{5} = \mathbf{0}.4$$

$$\frac{3}{8} = \mathbf{0.3}75$$

$$\frac{5}{13} = \mathbf{0.38}4615\dots$$

$$\frac{8}{21} = \mathbf{0.38}0952\dots$$

$$\frac{13}{34} = \mathbf{0.38}2352\dots$$

$$\frac{21}{55} = \mathbf{0.381}818\dots$$

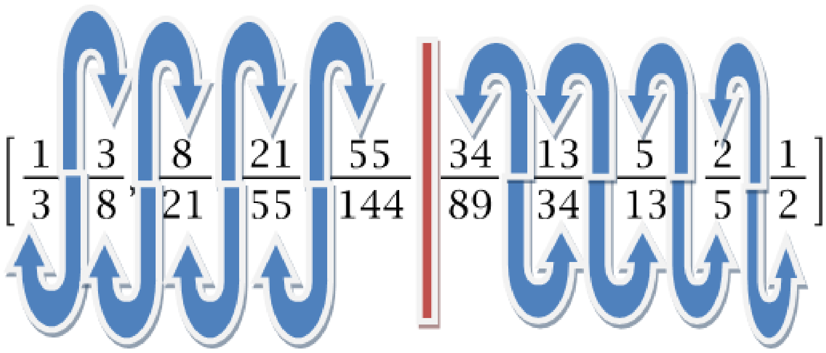
$$\frac{34}{89} = \mathbf{0.38}2022\dots$$

Упорядочим первые (кроме 0) 50 чисел последовательности

$1,\ \frac{1}{3}$
$2,\ \frac{3}{8}$
$3,\ \frac{8}{21}$
$4,\ \frac{21}{55}$
$5,\ \frac{55}{144}$
$6,\ \frac{144}{377}$
$7,\ \frac{377}{987}$
$8,\ \frac{987}{2584}$
$9,\ \frac{2584}{6765}$
$10,\ \frac{6765}{17711}$
$11,\ \frac{17711}{46368}$
$12,\ \frac{46368}{121393}$
$13,\ \frac{121393}{317811}$
$14,\ \frac{317811}{832040}$
$15,\ \frac{832040}{2178309}$
$16,\ \frac{2178309}{5702887}$
$17,\ \frac{5702887}{14930352}$
$18,\ \frac{14930352}{39088169}$
$19,\ \frac{39088169}{102334155}$
$20,\ \frac{102334155}{267914296}$
$21,\ \frac{267914296}{701408733}$
$22,\ \frac{701408733}{1836311903}$
$23,\ \frac{1836311903}{4807526976}$
$24,\ \frac{4807526976}{12586269025}$
$\left\{ 25,\ \frac{12586269025}{32951280099} \quad 26,\ \frac{7778742049}{20365011074} \right\}$
$27,\ \frac{2971215073}{7778742049}$
$28,\ \frac{1134903170}{2971215073}$
$29,\ \frac{433494437}{1134903170}$
$30,\ \frac{165580141}{433494437}$
$31,\ \frac{63245986}{165580141}$
$32,\ \frac{24157817}{63245986}$
$33,\ \frac{9227465}{24157817}$
$34,\ \frac{3524578}{9227465}$
$35,\ \frac{1346269}{3524578}$
$36,\ \frac{514229}{1346269}$
$37,\ \frac{196418}{514229}$
$38,\ \frac{75025}{196418}$
$39,\ \frac{28657}{75025}$
$40,\ \frac{10946}{28657}$
$41,\ \frac{4181}{10946}$
$42,\ \frac{1597}{4181}$
$43,\ \frac{610}{1597}$
$44,\ \frac{233}{610}$
$45,\ \frac{89}{233}$
$46,\ \frac{34}{89}$
$47,\ \frac{13}{34}$
$48,\ \frac{5}{13}$
$49,\ \frac{2}{5}$
$50,\ \frac{1}{2}$

Эта последовательность (упорядоченная Фибоначчи-Фарея) оказалась

ЗМЕЕВИДНОЙ: *числитель каждой дроби равен знаменателю соседней*, причём до середины – предыдущей, а после середины – последующей. Рассмотрим 10 членов этой последовательности.



Вот некоторые её свойства.

(а) Все эти числа находятся между 0 и $\frac{1}{2}$.

(б) Ровно посередине, там, где "змеевидность разворачивается", члены последовательности очень близки:

$$\frac{\frac{55}{144}}{\frac{34}{89}} = \mathbf{\frac{4895}{4896}}$$

Для сравнения этих средних соседних чисел, $\frac{55}{144}$ и $\frac{34}{89}$, нужно свыше 41-го знака после запятой!

(в) Почти как в классической последовательности

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1}},$$

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}}},$$

$$\frac{3}{8} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}},$$

$$\frac{5}{13} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}},$$

и так далее.

5. Заключение

Главное из обнаруженных свойств последовательностей Фибоначчи-Фарея – неравенства

$$x_0 < x_2 < x_4 < \ldots < x_{50} < x_{49} < \ldots < x_5 < x_3 < x_1.$$

В продолжение этой работы я надеюсь объяснить это и другие замеченные свойства рассмотренных последовательностей и найти их обобщения и аналоги.

В качестве обобщений будут рассмотрены последовательности Фибоначчи-Фарея с другими начальными условиями.

Один из аналогов – змеевидные свойства последовательностей <u>нечётной</u> длины. Например, 9 чисел последовательности упорядочиваются так:

$$\left[\frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{8}{21}, \frac{21}{55}, \frac{34}{89} \,\Big|\, \frac{13}{34}, \frac{5}{13}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right]$$

а 11 чисел – так:

$$\left[\frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{8}{21}, \frac{21}{55}, \frac{55}{144}, \,\Big|\, \frac{89}{233}, \frac{34}{89}, \frac{13}{34}, \frac{5}{13}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right]$$