

Четность

Задача 1. В парламенте некоторой страны две палаты с равным числом депутатов. В голосовании по важному вопросу приняли участие все депутаты, причем воздержавшихся не было. Когда председатель сообщил, что решение принято с преимуществом в 23 голоса, лидер оппозиции заявил, что результаты голосования сфальсифицированы. Как он это понял?

Указание. Пусть в палатах было по x депутатов. Сколько депутатов проголосовали «за»?

Задача 2. Аборигены поймали Кука и просят за его выкуп 300 монет на общую сумму 1001 рупия. Аборигены не признают никаких других монет, кроме монет 1, 5, 7 и 9 рупий. Можно ли выкупить Кука на таких условиях?

Комментарий. Какой будет сумма двух четных, четного и нечетного, двух нечетных? Полезно составить табличку 2×2 ; и еще одну для умножения.

Ответ. Нет, так как сумма четного числа нечетных чисел всегда четна (это можно доказать, например, разбив слагаемые на пары).

Задача 3. На доске написаны в строчку числа от 1 до 10. Вовочка предлагает Маше сыграть в следующую игру: двое по очереди ставят по знаку «+» или «−» между какими-то двумя числами; после того, как все знаки расставлены, подсчитывается результат — если он четен, то выигрывает Маша, а если нечетен, то Вовочка. Вовочка спрашивает у Маши, первой или второй она хочет ходить. Что ей выбрать? *Ответ.* Не играть в эту игру — вне зависимости от расстановки знаков, результат будет нечетен (ср. с пред. задачей).

Задача 4. а) Кузнечик прыгает по прямой. В первый раз — на 1 см, во второй раз — на 2 см и так далее. Может ли он после 2009 прыжков оказаться там же, где начинал? *Указание.* С координатой кузнечика происходит предыдущая задача.

б) Улитка ползет по столу с постоянной скоростью, каждые 15 минут поворачивая на 90° (в остальное время она ползет по прямой). Докажите, что она может вернуться в исходный пункт только через целое число часов. *Указание.* Посмотрим на четности координат улитки.

Задача 5. На доске написаны числа от 1 до 6. За ход разрешается прибавить к любым двум из них по единице. Можно ли за несколько ходов сделать все числа равными? *Указание.* Посмотри на сумму чисел.

Задача 6. В каждой вершине 10-угольника стоит по фишке. За один ход разрешается передвинуть любые две фишки в соседние вершины. Можно ли собрать все фишки в одной вершине?

Четность. Продолжение

Задача 7. Можно ли соединить проводами а) 2009 б) 2010 телефонов так, чтобы каждый был соединен ровно с тремя другими?

Задача 8. Существует ли 2009-звенная ломаная, пересекающая каждое свое ребро ровно по одному разу?

Задача 9. Может ли прямая, не проходящая через вершины а) 2009- б) 2010-угольника, пересекать все его стороны?

Задача 10. Равносторонний треугольник со стороной n сложен из n^2 треугольничков со стороной 1. Муравей гуляет по треугольничкам, каждый раз переходя в соседний по стороне и не возвращаясь в треугольнички, в которых уже бывал. Какое максимальное количество треугольников он может обойти?

Задача 11. У царя Додона было 100 узников в мрачной сырой темнице, у каждого узника — своя камера, с номером от 1 до 100. И вот однажды, в канун великого праздника, царь да и решил их выпустить на волю. Но не всех, а по следующему правилу:

первый стражник отпирает все камеры;

второй стражник запирает все камеры с четными номерами;

третий стражник все запертые камеры с номером, делящимся на три, отпирает, а открытые — запирает;

...

сотый стражник или отпирает последнюю камеру, или запирает.

Все узники, камеры которых открыты, теперь свободны. Сколько узников освободил Додон?