

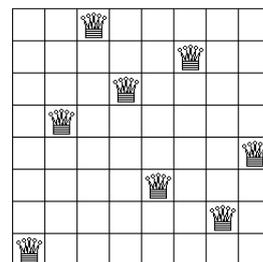
Симметрия

Задача 1. На доске 11×11 расставили 11 шашек симметрично относительно диагонали. Докажите, что на этой диагонали стоит хотя бы одна шашка.

Указание. Предположим противное. Тогда шашки разбиваются на пары.

Задача 2. а) Петя смог расставить на шахматной доске 8 ферзей так, чтобы они не били друг друга. Придумайте еще один способ это сделать. *Ответ.* Отразим картинку.

б) Докажите, что число способ расставить на шахматной доске 8 ферзей так, чтобы они не били друг друга, четно.

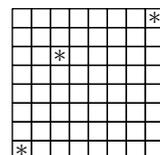


Комментарий. Вообще, чтобы доказать четность чего-то, можно разбить их на пары. Это можно делать при помощи симметрии (как с расстановками ферзей во второй задаче) — но надо следить за элементами, переходящими при симметрии в себя (как шашки на диагонали из первой задачи).

Задача 3. Двое по очереди ставят слонов на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга. Тот, кто не может сделать ход — проиграл. Кто выигрывает при правильной игре? *Ответ.* Второй — он может отвечать на каждый ход симметричным относительно средней линии доски (этот ход всегда допустим, так как иначе недопустим был бы и предыдущий ход первого — ср. с попыткой ходить симметрично относительно центра доски).

Задача 4. а) Докажите, что число путей на шахматной доске, идущих из левого нижнего угла в правый верхний, четно. (За ход разрешается сдвигаться на клетку вправо или вверх.) *Указание.* Отразим путь относительно диагонали.

б) Докажите, что число тех путей из предыдущего пункта, что проходят через клетку с6 (см. рис.), является полным квадратом.



Соответствия

Задача 5. Чего больше: способов выбрать 5 предметов из 12 или 7 из 12?

Ответ. Поровну (выбрать 5 любимых месяцев — то же самое, что выбрать 7 нелюбимых).

Задача 6. Чего больше: способов выбрать четное или нечетное число предметов из а) 101 б) 100 предметов? *Ответ.* Поровну.

Задача 7. Докажите, что число делителей полного квадрата нечетно.

Указание. Делители числа a разбиваются на пары (x, y) , такие что $xy = a$ (замена x на a/x — тоже род симметрии: если сделать такое преобразование два раза, число не изменится).

Задача 8. Номер трамвайного билета состоит из 6 произвольных цифр. Билет называют счастливым, если сумма первых 3 цифр равна сумме последних 3 цифр. (Например, билет 096438 — счастливый.) Каких билетов больше: счастливых или а) тех, у которых сумма цифр номера равна 27?

б*) тех, у которых номер делится на 11?

Указание. а) Разобьем все билеты на пары \overline{abcxyz} и $\overline{abc(9-x)(9-y)(9-z)}$.