Чередование

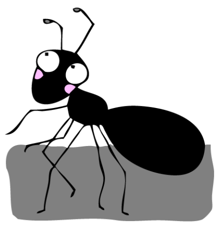
Идея. На шахматной доске при ходе коня или хромой ладьи чередуются цвета полей. Если прошли без повторений по четному числу полей, то белых и черных поровну. Если прошли нечетное число полей, то начального цвета на один больше.

Задача 1. Хромая ладья стартовала с белого поля и сделала 99 ходов. Сколько из этих ходов были сделаны с белого поля на черное? (Напомним, что хромая ладья ходит по вертикали и по горизонтали, но только на одну клетку.)

Задача 2. Конь стартовал из правого нижнего угла и побывал на каждом поле доски ровно один раз. Мог ли он закончить путь в левом верхнем углу?

Задача 3. Шахматный король обошел всю доску, побывав на каждом поле по одному разу. Первая и последняя клетка одного цвета. Докажите, что
а) он хотя бы один ход сделал по диагонали,
б) он сделал по диагонали нечетное число ходов.

Идея. Можно самому раскрасить поля (вершины, точки) в два цвета так, чтобы при переходе цвета чередовались.



Задача 4*. Муравей бегает по ребрам куба со стороной 1, нигде не поворачивая назад. Он начал из одной вершины, а закончил в противоположной. Докажите, что его путь — нечетной длины.

Задача 5*. В верхней грани кубика провели диагональ. Кубик прокатили по поверхности стола, перекувыркнув через ребро 33 раза, при этом грань с диагональю снова оказалась сверху. Докажите, что начальное и конечное положение диагонали не параллельны.

Задача 6. Конь попрыгал по шахматной доске. Может ли он на одном поле побывать 5 раз, а на всех остальных — ровно по разу?

Задача 7. Поле для игры в классики представляет собой клетчатый прямоугольник 2×5, клетки которого пронумерованы по кругу от 1 до 10 (см. рис.). Маша впрыгнула в клетку 1, прыгала из клетки в клетку с общей стороной и выпрыгнула из клеки 10. На клетке 1 она побывала один раз, на клетке 2 — два раза, ..., на клетке 9 — девять раз. Сколько раз Маша побывала на клетке 10?

5	6
4	7
3	8
2	9
1	10

Чередование (продолжение)

Идея. Чередуются не только цвета. Догадайтесь сами, что чередуется в следующих задачах.

Задача 8. В ряд сидят 33 школьника. Никакие два мальчика или две девочки не сидят рядом. Какое наибольшее число девочек может быть среди них?

Задача 9. За круглым столом сидят 33 школьника. Докажите, что найдутся сидящие рядом школьники одного пола.

Задача 10. а) Прямая не проходит через вершины невыпуклого 10-угольника. Может ли она пересекать все стороны 10-угольника?
б) Прямая не проходит через вершины невыпуклого 11-угольника. Может ли она пересекать все стороны 11-угольника?

Идея. Когда фигур несколько, могут чередоваться свойства. Пусть по шахматной доске ходят две фигуры (кони или хромые ладьи). Тогда цвета их полей по очереди совпадают или различаются. Если фигур несколько, то число фигур на белых полях будет по очереди то четным, то нечетным.

Задача 11. Два коня стояли в двух углах шахматной доски. Они сделали вместе 77 ходов. Могли ли они в результате прийти в два других угла доски?

Задача 12. На первой горизонтали шахматной доски стоят 8 черных пешек, а на последней — 8 белых. За один ход можно любую пешку передвинуть на соседнее поле по горизонтали или вертикали. Можно ли поменять местами черные пешки с белыми ровно за 777 ходов?