

Инварианты

Инвариант — это нечто, остающееся неизменным.

Задача 0. Хулиган Вася рвет школьную стенгазету: каждый раз рвет один из кусков на 5. Может ли через некоторое время получиться а) 26; б) 2011 кусков?

Задача 1. Теперь Васе помогает Петя, который рвет куски на 7 частей. Могут ли они вдвоем получить а) 2010; б) 2011 кусков?

в) Выясните, сколько кусков они могут получить, а сколько не могут.

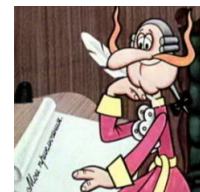
Задача 2. На доске написаны три числа: 1000, 1001, 1002. Каждую секунду набор чисел a, b, c каждую секунду заменяют на набор $a + b - c, b + c - a, c + a - b$. Может ли через некоторое время получиться набор 1001, 1002, 1003?

Задача 3*. На доске написаны числа 1 и 2. Каждый день научный консультант Выбегалло заменяет два написанных числа a и b на их среднее арифметическое $\frac{a+b}{2}$ и среднее гармоническое $\frac{2}{1/a+1/b}$. Однажды одним из написанных чисел оказалось $941664/665857$. Каким в этот момент было другое число?

Задача 4. Круг разделен на шесть секторов, в каждом из которых лежит по селедке. Разрешается за один ход передвинуть любые две селедки в соседних секторах, двигая их в разные стороны. Можно ли с помощью этой операции собрать все селедки в одном секторе?

Задача 5. На доске написано число 123. Разрешается переставлять любые две различные цифры. Барон Мюнхгаузен после 101 операции опять получил исходное число. Не ошибся ли он?

Указание. Какие числа можно получить за одну операцию? за две? за три?



Полуинварианты

Полуинвариант — это нечто, меняющееся необратимо (например, число, которое с каждым шагом уменьшается).

Задача 6. На доске написано 100 чисел. Каждую секунду какое-то число увеличивают на 1, а какое-то уменьшают на 2. Докажите, что через некоторое время на доске появится отрицательное число.

Задача 7. На доске были написаны неотрицательные числа a, b, c, d . Их заменили на числа $a + b, b + c, c + d, d + a$. Эту процедуру повторили несколько раз и снова получили исходные числа. Найдите их.

Задача 8. В клетках прямоугольной таблицы расставлены числа. Разрешается менять знак сразу у всех чисел какой-либо строки или какого-либо столбца. Докажите, что можно добиться того, чтобы в каждой строке и в каждом столбце сумма всех чисел была неотрицательна.

Задача 9. В каждой из n стран правит либо партия правых, либо партия левых. Каждый год в одной из стран А может поменяться власть. Это может произойти в том случае, если в большинстве граничащих со страной А стран правит не та партия, которая правит в стране А. Докажите, что смены правительств не могут продолжаться бесконечно.

Задача 10. На квадратном поле 10×10 девять клеток 1×1 поросли бурьяном. После этого бурьян может распространиться на клетку, у которой не менее двух соседних клеток уже поросли бурьяном. Докажите, что тем не менее бурьян не сможет распространиться на все клетки.

