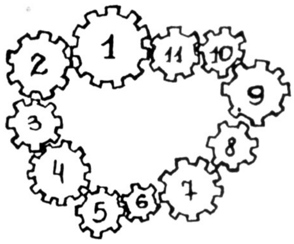
Чередование и четность

Задача 0 (разминка). Поезд проходит (считая с момента, когда поезд начал въезжать на мост, до момента, когда он целиком съехал с него) мост длиной 450 метров за минуту. А мимо телеграфного столба поезд идет полминуты. Найдите длину и скорость поезда.

Ответ: длина поезда — 450 м, скорость — 900 м/мин, т. е. 54 км/ч.



Задача 1. На плоскости расположено 11 шестеренок, соединенных по цепочке. Могут ли они вращаться?

Шестеренки, вращающиеся по часовой стрелке и против часовой стрелки, **чередуются**.

Задача 2. Можно ли прямоугольник 11×13 разрезать на доминошки (прямоугольники 1×2)?

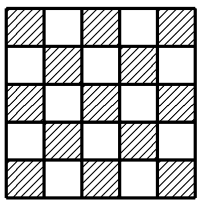
Сколько на этой доске клеток, четное или нечетное число?

Задача 3. Все костяшки домино выложили (соблюдая правила игры) в одну длинную цепь. На одном конце этой цепи оказалось 5 очков. Сколько очков может быть на другом конце цепи?

Если где-то лежит костяшка $* - 5$, то рядом с ней лежит костяшка $5 - *$ — возникает **разбиение на пары**. Сколько костяшек с пятеркой всего? Все ли они в этом разбиении на пары участвуют?

Задача 4. Доска 5×5 разрезана на доминошки и одну клетку. Где может располагаться эта клетка?

На рисунке заштрихованы клетки, без которых доску разрезать на доминошки довольно быстро получается.



Итак, без одной *черной* клетки доску на доминошки разрезать получается; почему же без одной *белой* клетки ее разрезать не получится? А сколько всего черных и белых клеток на доске? Сколько черных и белых клеток занимает одна доминошка?

К теме вспомогательной **раскраски**, помогающей решить задачу, мы еще вернемся.

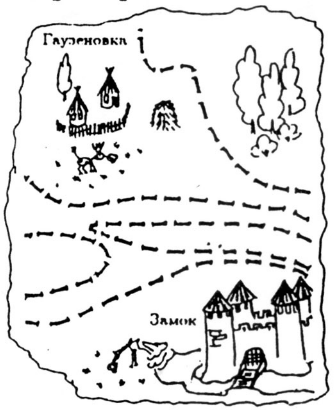
Чередование и четность (продолжение)

Задача 5. Двое по очереди двигают фишку по шахматной доске: каждым ходом — либо на клетку вправо, либо на клетку вверх. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает.

Кто (начинающий или второй) может выиграть, как бы ни играл его соперник, если в начале игры фишка стоит а) в клетке a1 (левом нижнем углу); б) в клетке e2?

Результат игры не зависит от действий игроков — ср. с задачей 0 следующего занятия.

Задача 6. Давным-давно барон Мюнхгаузен обнес свои владения забором и нарисовал на карте. Барон забыл, входит ли в его владения деревня Гаузеновка. Он смог найти лишь обрывок карты, на который попали его замок, деревня Гаузеновка и часть забора, проходящая по этому участку. Входит ли деревня во владения барона?



Чередование: каждый раз, когда мы перелезаем через забор, мы попадаем из владений барона наружу и наоборот.

Задача 7. Может ли прямая, не проходящая через вершины а) 2014- б) 2015-угольника, пересекать все его стороны?

Ср. с предыдущей задачей.

Задача 8. а) Кузнечик прыгает по прямой, каждым прыжком смещаясь либо на 1 дм вправо, либо на 1 дм влево. Может ли он вернуться в исходную точку за 2015 прыжков?

б) Улитка ползет по столу с постоянной скоростью, каждые 15 минут поворачивая на 90° (в остальное время она ползет по прямой). Докажите, что она может вернуться в исходный пункт только через целое число часов.

а) Кузнечик должен сделать столько же прыжков вправо, сколько влево.

Или можно сказать по-другому: если покрасить точки, по которым прыгает кузнечик, в черный и белый цвета, то черные и белые точки на пути кузнечика *чередуются*.