Геометрия суммы $\mathbf{1+3+5+7+\ldots}$

▷ **Задача 3в).** Как продолжить последовательность $1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots$?

Можно посмотреть на разности соседних чисел: в первый раз прибавляется $4-1=3$, потом 5, потом 7 и т. д.:

$$1 \xrightarrow{+3} 4 \xrightarrow{+5} 9 \xrightarrow{+7} 16 \xrightarrow{+9} 25 \xrightarrow{+11} 36 \xrightarrow{+13} \mathbf{49} \xrightarrow{+15} \mathbf{64} \to \ldots$$

С другой стороны, можно заметить, что наша последовательность состоит из квадратов последовательных чисел: $1=1\cdot 1$, $4=2\cdot 2$, $9=3\cdot 3$ и т. д.

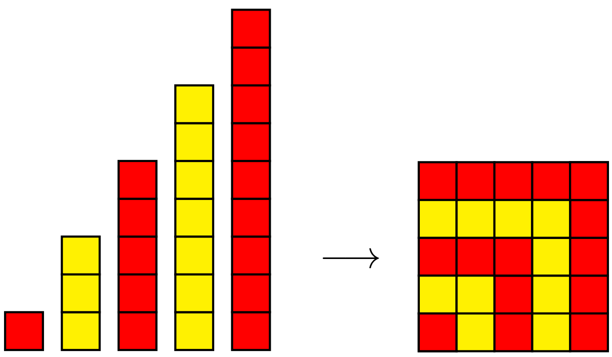
▷ По крайней мере в начале оба способа дают одно и то же продолжение последовательности ($36+13=49=7\cdot 7$, $49+15=64=8\cdot 8$). Но почему так происходит? будут ли оба способа давать одинаковый результат все время?

▷ Первый рецепт для получения числа, скажем, 25 сводится к тому, что нужно сложить последовательные нечетные числа:

$$1+3+5+7+9=25.$$

Про такую сумму естественно думать как про несколько (в данном случае, пять) столбиков из кубиков.

А хотим мы убедиться, что в ней столько же кубиков, сколько и в квадрате (в данном случае, со стороной, опять же, 5). Это легко увидеть, «согнув каждый из столбиков пополам»:



$1+3+5+7+9$ $5\cdot 5$

▷ **Дополнительная задача.** Найти геометрически сумму $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$.