

Двоичная запись и передача информации

Задача 0. Как разложить по 7 кошелькам 127 рублевых монет, чтобы любую сумму от 1 до 127 рублей можно было выдать, не открывая кошельков?

Ответ: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64.

- ▷ Что означает десятичная запись числа? Запись «2014» кодирует число $2 \cdot 10^3 + 0 + 10^2 + 4$. При двоичной записи вместо степеней десятки (1, 10, 100, 1000...) используются степени двойки: $10_2 = 2$, $100_2 = 4$ и т. д. — так что, скажем, «1101₂» — это запись числа $2^3 + 2^2 + 0 + 1 = 13$. Оказывается, при этом для записи любого числа хватает только двух цифр, 0 и 1 (почему?).

Другими словами, двоичная запись числа получается из представления этого числа в виде суммы различных степеней двойки (как в задаче 0).

Задача 1. Запишите в двоичной системе счисления а) 11; б) 255; в) 2014.

Работает «жадный алгоритм»: вычитаем из числа самую большую степень двойки, какую можно; дальше работаем с остатком. Например, $11 = 2^3 + 3 = 2^3 + 2 + 1 + 1 = 1011_2$.

Задача 2. Чему равна сумма $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n$?

Удобно считать в двоичной системе:

$$1 + 2 + \dots + 2^n = 1 + 10_2 + 100_2 + \dots + \overbrace{10\dots0_2}^{n \text{ шт}} = \overbrace{11\dots1_2}^{n+1 \text{ шт}} = \overbrace{100\dots0_2}^{n+1 \text{ шт}} - 1 = 2^{n+1} - 1.$$

Как всегда, полезно подумать про обобщения — например, про сумму $1 + 3 + 9 + \dots + 3^n$.

Задача 3. а) Попугай загадал целое число от 1 до 8. Помогите любопытному Слоненку за 3 вопроса (допускающих ответ «да»/«нет») узнать это число.

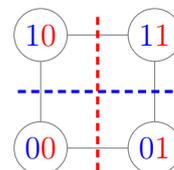
Полезно сначала подумать про угадывание одного предмета из 4 (за 2 вопроса). Дальше поможет идея последовательного конструирования (в духе занятия 'Step by step').

б) То же, если Попугай загадал число от 1 до 15, а Слоненок может задать 4 вопроса.

в) А хватит ли того же числа вопросов, если теперь Слоненок должен заранее записать все вопросы на бумажке? (Т. е. больше нельзя выбирать следующий вопрос в зависимости от ответа на предыдущие.)

Снова полезно начать с 4 предметов. Есть расположить их в вершинах квадрата (а 8 — в вершинах куба), список вопросов придумать легче.

Если теперь понять, как все это связано с двоичной записью, получится решить задачу и для большего числа предметов.



Задача 4. Теперь Попугай задумал два натуральных числа и сообщил только, что их произведение равно 2014. Сколько вопросов (допускающих ответ «да»/«нет») потребуется Слоненку, чтобы узнать оба числа?

Полезно вспомнить разложение 2014 на простые множители, $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$.