

Поиск закономерностей

Задача 1. Инопланетянин со звезды Тау Кита, прилетев на Землю в понедельник, воскликнул: «А!». Во вторник он воскликнул: «АУ!», в среду — «АУУА!», в четверг — «АУУАУААУ!». Что он воскликнет в субботу?

Ответом должно являться четкое правило, по которому следующее слово строится из предыдущего. Если выписать слова в столбик, найти правило легче.

- ▷ В последовательности Фибоначчи $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$ каждое число равно сумме двух предыдущих.

Задача 2. Есть ли в последовательности Фибоначчи пара стоящих рядом четных чисел? Является ли сотое число Фибоначчи четным или нечетным?

Если выписать четность первых нескольких чисел Фибоначчи, то закономерность сразу видна:

1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	...
Н	Н	Ч	Н	Н	Ч	Н	Н	Ч	Н	...

Полезно подумать про обобщения (про делимость на 3 или на 5, для начала...).

Задача 3. Дроби $\frac{2}{5}$ и $\frac{3}{8}$ очень близки: $\frac{2}{5} - \frac{3}{8} = \frac{1}{40}$ (поэтому «доказательство» того, что $64=65$, и выглядело так убедительно). Придумайте обобщение с другими числами Фибоначчи.

(Предупреждение: доказать общее утверждение, вероятно, не удастся.)

$$2 \cdot 8 - 3 \cdot 5 = 1; \quad 3 \cdot 13 - 5 \cdot 8 = -1; \quad 21 \cdot 5 - 8 \cdot 13 = 1 \dots$$

Задача 4. Первоклассница Маша, выходя из школы, каждый раз спускается с крыльца по лестнице из 10 ступенек. Находясь на очередной ступеньке, она может либо спуститься на следующую, либо перепрыгнуть через одну ступеньку (перепрыгнуть через две или более ступенек Маша пока не может). Сколько раз Маше нужно выйти из школы, чтобы спуститься с крыльца всеми возможными способами?

Как всегда, полезно сначала порешать более простые варианты этой задачи (с меньшим числом ступенек).

С лестницы высотой в одну ступеньку можно спуститься 1 способом; высоты в две ступеньки — 2 способами (спуститься два раза на ступеньку, «1+1», или сразу прыгнуть, «2»); высоты в три ступеньки — 3 способами (1+1+1, 2+1, 1+2), четыре ступеньки — 5 способами (1+1+1+1, 2+1+1, 1+2+1, 1+1+2, 2+2).

При взгляде на последовательность (1,) 1, 2, 3, 5 возникает естественная гипотеза — но как ее доказать?..

Задача 5. Чему равна сумма

а) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3}$; б) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4}$; в) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100}$?

Если не полениться и посчитать ответы в пунктах а) и б), то точно возникнет гипотеза про ответ в пункте в).

Задача 6. Ниже приведены японские названия некоторых годов по традиционному восточному календарю: каното уси (1901), хиноэ ума (1966), цутиноэ ума (1978), цутиното хицудзи (1979), каноэ сару (1980), хиноэ тора (1986), цутиното ми (1989), мидзуноэ ума (2002), мидзуното хицудзи (2003), хиноэ ума (2026).

Когда наступит ближайший год хиноэ сару? каноэ тора?

Если посмотреть на то, когда появляются а) годы «... ума»; б) годы «хиноэ ...», «цутиното ...», то можно догадаться, что эта система основана на комбинации десятичного цикла («небесные стволы») и двенадцатеричного (точнее, состоящего из шести пар) цикла («земные ветви»).