

Занятие 3.

Определение 1. *Арифметическая прогрессия* это последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, у которой разность двух последовательных членов $(a_n - a_{n-1})$ равна одному и тому же числу d , которое называется *шагом* или *разностью*. То есть арифметическая прогрессия может быть записана в виде $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots, a_1 + (n - 1)d, \dots$

Примеры. 1) Натуральные числа: $1, 2, 3, \dots$ ($a_1 = 1, d = 1$)

2) Положительные числа, которые дают остаток 5 при делении на 7: $5, 12, 19, 26, \dots$ ($a_1 = 5, d = 7$)

3) Отрицательные рациональные числа, которые можно представить в виде дроби с знаменателем 3: $\frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}, -1, \frac{-4}{3}, \dots$ ($a_1 = -\frac{1}{3}, d = -\frac{1}{3}$)

Определение 2. *Геометрическая прогрессия* это последовательность чисел $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$, у которой отношение двух последовательных членов $(b_n : b_{n-1})$ равно одному и тому же числу q , которое называется *знаменателем*. То есть геометрическая прогрессия может быть записана в виде $b_1, b_1q, b_1q^2, \dots, b_1q^{n-1}, \dots$

Примеры. 1) Степени двойки: $1, 2, 4, 8, 16, \dots$ ($b_1 = 1, q = 2$)

2) $1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ ($b_1 = 1, q = -\frac{1}{2}$)

Задача 1. а) Чему равен 100ый член арифметической прогрессии с начальным членом 2 и разностью -5? б) Чему равна сумма первых 999 членов арифметической прогрессии с $a_1 = 1$ и $d = 1$? в) Для арифметической прогрессии (a_1, d) найдите сумму первых n членов. г) Чему равна сумма всех членов арифметической прогрессии с n -ого по $2n$ -ый?

Задача 2. Разложите на множители: а) $x^n - y^n$; б) $x^{2n+1} + y^{2n+1}$.

Задача 3. а) Чему равен 10ый член геометрической прогрессии с начальным членом 20 и знаменателем $\frac{1}{2}$? б) Чему равна сумма первых 101 членов геометрической прогрессии с $b_1 = 57$ и $q = -1$? в) Для геометрической прогрессии (b_1, q) найдите сумму первых n членов. г) Чему равна сумма всех членов геометрической прогрессии с m -ого по n -ый ($m < n$)?

Задача 4. Найдите сумму $7 + 77 + 777 + \dots + 7\dots77$, где последнее число состоит из n семерок.

Задача 5. Имеется несколько гирь, общая масса которых равна 1кг. Все гири пронумерованы $(1, 2, 3, \dots)$. Докажите, что найдется гиря с номером n , масса которой будет больше $\frac{1}{2^n}$.

Задача 6. Обязательно ли 101ый член геометрической прогрессии будет целым, если целыми являются первые 100 членов?

Задача 7. Три простых числа, больших 3, образуют арифметическую прогрессию с разностью d . Докажите, что d делится на 6.

Задача 8. Допустим, что существуют 15 простых чисел, которые образуют арифметическую прогрессию с разностью d . Докажите, что тогда $d > 30000$.

Задача 9. Даны 100 чисел. Когда каждое из них увеличили на 1, сумма их квадратов не изменилась. Каждое число еще раз увеличили на 1. Изменится ли сумма квадратов не этот раз, и если да, то на сколько?