Занятие 4.

Определение 1. Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется *средней линией* треугольника.

Теорема 1. В треугольнике средняя линия параллельна третьей стороне и равна половине ее длины.

Определение 2. Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называется *средней линией* трапеции.

Теорема 2. В трапеции средняя линия параллельна основаниям и равна полусумме их длин.

Теорема 3. (теорема Пифагора) В прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы.

Пример 1. Медианы в треугольнике пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2:1, считая от вершины треугольника.

Пример 2. Середины сторон выпуклого пятиугольника последовательно соединены отрезками. Найдите периметр полученного пятиугольника, если сумма длин всех диагоналей равна a.

Задача 1. В четырехугольнике ABCD отметили середины сторон AB, BC, CD, DA - K, L, M, N соответственно. Докажите, что KM и LN точкой пересечения делятся пополам.

Задача 2. Из вершины A треугольника ABC опущены перпендикуляры AM и AP на биссектрисы внешних углов B и C. Найдите отрезок PM, если периметр треугольника ABC равен 10.

Задача 3. Докажите, что сумма трех медиан треугольника меньше периметра, но больше трех четвертей периметра треугольника.

Задача 4. На стороне AB треугольника ABC взята точка P такая, что AP=2PB, а на стороне AC - ее середина, точка Q. Известно, что CP=2PQ. Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

Задача 5*. В четырехугольнике ABCD угол B равен 150°, угол C прямой, а стороны AB и CD равны. Найдите угол между стороной BC и прямой, проходящей через середины сторон BC и AD.

Задача 6. Через начало координат в первом квадранте проведены прямые (включая оси координат), которые делят координатную плоскость на углы в 1°. Найдите сумму абсцисс точек пересечения этих прямых с прямой $y = 100 - x$.

Задача 7. На двух сторонах треугольника вне его построены квадраты. Докажите, что отрезок, соединяющий концы сторон квадратов, выходящих из одной вершины треугольника, в 2 раза больше медианы треугольника, выходящей из той же вершины.