Занятие 6.

Определение 1. Целое число a делится на целое число $b \neq 0$, если существует такое целое число c, что a=bc.

Пример 1. Если a и b делятся на c, то сумма a+b тоже делится на c.

Пример 2. Если a делится на b и b делится на c, то a делится на c.

Определение 2. Натуральное число p называется простым, если у него всего два различных делителя - 1 и p. Составным называется натуральное число большее 1, не являющееся простым.

Определение 3. Два числа называются взаимно простыми, если они не имеют общих натуральных делителей, кроме 1.

Теорема. (Основная теорема арифметики) Каждое натуральное число $n > 1$ имеет единственное (с точностью до порядка множителей) разложение на простые множители $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, где $p_1, p_2, ..., p_k$ - попарно различные простые числа, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ - натуральные числа.

Пример 3. Докажите, что a+b - составное число, если $119a = 55b$.

Пример 4. а) Число делится на 3 и 7. Делится ли оно на 21? б) Число делится на 6 и 15. Делится ли оно на 90?

Задача 1. Найдите конечную арифметическую прогрессию с разностью 6 максимальной длины, состоящую из простых чисел.

Задача 2. Найдите три попарно взаимно простых числа таких, что сумма любых двух из них делится на третье.

Задача 3. Если p - простое число, большее трех, то $p^2 - 1$ делится на 24.

Задача 4. Известно, что числа p и $p^2 + 2$ простые. Докажите, что число $p^3 + 2$ тоже простое.

Задача 5. Докажите, что произведение а) 3 последовательных чисел делится на 6; б) 4 последовательных чисел делится на 24; в) 5 последовательных чисел делится на 120.

Задача 6. а) Докажите, что для любого целого n число $n^3 - n$ делится на 6. б) Известно, что $a^3 + b^3 + c^3 + d^3$ делится на 6. Докажите, что a+b+c+d делится на 6.

Задача 7. а) Решите в натуральных числах уравнение $x^2 - y^2 = 60$. б) Какие числа можно представить в виде разности квадратов двух целых чисел?

Задача 8. Сколько различных делителей у числа $2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2$?

Задача 9. Пусть p - простое число. Сколько существует натуральных чисел, меньших p^2 и взаимно простых с ним?

Задача 10. Докажите, что если целочисленная арифметическая прогрессия содержит квадрат целого числа, то она содержит сколько угодно квадратов целых чисел.