Занятие 7.

Определение 1. Говорят, что целое число a делится на натуральное число b с остатком r ($0 \leq \leq r < b$), если существует такое целое число c, что выполняется равенство $a = b \cdot c + r$.

Пример 1. а) Делим 57 на 17: $57 = 17 \cdot 3 + 6$; б) делим -31 на 4: $-31 = 4 \cdot (-8) + 1$.

Оказывается, что остаток при делении на какое-то число n суммы/произведения двух чисел остается таким же при замене любого слагаемого/сомножителя на число с тем же остатком при делении на n (так 17+13=30 выглядит как 2+1=0, если перейти к остаткам при делении на 3, и сумма 20+13=33 дает тот же остаток). Таким образом, два этих замечания, сформулированных ниже как теорема 1, позволяют работать нам не с числами, а с их остатками. Это значительно упрощает решение задач про делимость (нацело).

Теорема 1. (Мы подразумеваем, что число n, на которое мы делим, фиксировано, поэтому опускаем слова «остаток при делении на n» и пишем просто «остаток») а) Остаток суммы равен остатку суммы остатков. б) Остаток произведения равен остатку произведения остатков.

Док-во для n=7: а) Числа a и b согласно определению 1 можно записать в виде $a = 7 \cdot x + r_1$, $b = 7 \cdot y + r_2$, тогда $a + b = 7 \cdot (x + y) + (r_1 + r_2)$, откуда видно, что часть $7 \cdot (x + y)$ никак не влияет на остаток, он определяется лишь остатком при делении на 7 суммы остатков $(r_1 + r_2)$, а именно равен ему. б) Остаток произведения $a \cdot b = 7 \cdot (7xy + xr_2 + yr_1) + (r_1r_2)$ опять-таки равен остатку произведения остатков (r_1r_2). Общий случай получается заменой 7 на переменную n.

Замечание. 1) Из теоремы следует, что утверждения верны и для произвольного количества слагаемых и сомножителей. 2) Остатки от деления на n принято называть остатками по модулю n.

Пример 2. Найти остаток от деления $2013 \cdot 2014 \cdot 2015 + 2016^2$ на 11.

Пример 3. Составьте таблицу сложения и умножения для остатков по модулю 4.

Пример 4. а) Какие остатки при делении на 3 дают квадраты натуральных чисел? При делении на 8? б) Докажите, что не существует целых a и b таких, что $a^2 + b^2 - 3$ делится на 8.

Задача 1. Составьте таблицу сложения и умножения остатков а) от делении на 5; б) от деления на 7.

Задача 2. Найдите наименьшее число, дающее остаток 2 при делении на 5, остаток 11 при делении на 17 и остаток 6 при делении на 23.

Задача 3. а) Найдите остатки от деления 2^{2014} на 5, 7, 11, 13, 17, 19. б) На какую цифру оканчивается число 777^{777}?

Задача 4. Докажите, что число $2222^{5555} + 5555^{2222}$ делится на 7.

Задача 5. а) Докажите, что $n^5 + 4n$ делится на 5 при любом натуральном n. б) Докажите, что $n^3 + 2$ не делится на 9 ни при каком натуральном n.

Задача 6. а) Целые числа a и b таковы, что число $a^2 + b^2$ делится на 21. Докажите, что это число делится и на 441. б) Целые числа a, b, c, d таковы, что $a^4 + b^4 + c^4 + d^4$ делится на 5. Докажите, что $abcd$ делится на 625.

Задача 7. Докажите, что при любом натуральном n а) $7^{n+2} + 8^{2n+1}$ делится на 57; б) $5^n + 7^n + 9^n + 11^n$ делится на 4.