Занятие 8.

Определение. НОД(a,b) (наибольший общий делитель) - наибольшее число, которое делит и a, и b. НОК(a,b) (наименьшее общее кратное) - наименьшее число, которое делится на a и b.

Алгоритм Евклида: Заметим, что если a при делении на b дает остаток r, то НОД(a,b)=НОД(b,r). Поскольку b>r, то b можно поделить на r с некоторым остатком r_1, тогда НОД(a,b)=НОД(b,r)=НОД(r,r_1) и снова $r > r_1$. Повторяя эту операцию достаточное количество раз (так как $b > r > r_1 > ...$, то есть второе число пар уменьшается, то мы рано или поздно закончим), мы в итоге получим, что первое число последней пары будет делится на второе, а значит второе число и будет являться наибольшим общим делителем.

Пример 1. Найти НОД(115,483).

Пример 2. Найти НОД(2n+13,n+7).

Задача 1. Найдите а) НОД(2542,451); б) НОД(206747,166549).

Задача 2. а) Найдите НОД($2^{57} - 1, 2^{95} - 1$). б) При каких m и n НОД($2^n - 1, 2^m - 1$)=1?

Задача 3. Чему равны а) НОД и НОК пары чисел ($2^7 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^2$, $2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7^4$); б) НОД и НОК пары($p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k}$, $p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot ... \cdot p_k^{\beta_k}$), где $p_1, ...p_k$ - различные простые числа. в) Используя б), докажите, что ab=НОД(a,b)·НОК(a,b).

Задача 4. Докажите, что дробь $\frac{174n+125}{206n+148}$ несократима.

Задача 5. Найдите НОД(111...111, 11...11) - в записи первого числа 100 единиц, в записи второго - 60.

Задача 6. Решите в целых числах уравнения: а) $2x + 4y = 3$; б) $17x - 23y = 0$; в) $17x - 23y = 1$; г) $17x - 23y = 2$.

Задача 7. Найдите все целые решения $x + \frac{1}{y+\frac{1}{z}} = \frac{10}{7}$.

Математический кружок МЦНМО. 8 класс. 22 ноября 2014

Занятие 8.

Определение. НОД(a,b) (наибольший общий делитель) - наибольшее число, которое делит и a, и b. НОК(a,b) (наименьшее общее кратное) - наименьшее число, которое делится на a и b.

Алгоритм Евклида: Заметим, что если a при делении на b дает остаток r, то НОД(a,b)=НОД(b,r). Поскольку b>r, то b можно поделить на r с некоторым остатком r_1, тогда НОД(a,b)=НОД(b,r)=НОД(r,r_1) и снова $r > r_1$. Повторяя эту операцию достаточное количество раз (так как $b > r > r_1 > ...$, то есть второе число пар уменьшается, то мы рано или поздно закончим), мы в итоге получим, что первое число последней пары будет делится на второе, а значит второе число и будет являться наибольшим общим делителем.

Пример 1. Найти НОД(115,483).

Пример 2. Найти НОД(2n+13,n+7).

Задача 1. Найдите а) НОД(2542,451); б) НОД(206747,166549).

Задача 2. а) Найдите НОД($2^{57} - 1, 2^{95} - 1$). б) При каких m и n НОД($2^n - 1, 2^m - 1$)=1?

Задача 3. Чему равны а) НОД и НОК пары чисел ($2^7 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^2$, $2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7^4$); б) НОД и НОК пары($p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k}$, $p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot ... \cdot p_k^{\beta_k}$), где $p_1, ...p_k$ - различные простые числа. в) Используя б), докажите, что ab=НОД(a,b)·НОК(a,b).

Задача 4. Докажите, что дробь $\frac{174n+125}{206n+148}$ несократима.

Задача 5. Найдите НОД(111...111, 11...11) - в записи первого числа 100 единиц, в записи второго - 60.

Задача 6. Решите в целых числах уравнения: а) $2x + 4y = 3$; б) $17x - 23y = 0$; в) $17x - 23y = 1$; г) $17x - 23y = 2$.

Задача 7. Найдите все целые решения $x + \frac{1}{y+\frac{1}{z}} = \frac{10}{7}$.