

Занятие 9.

Принцип Дирихле. Если в N клетках сидят не менее $kN + 1$ кроликов, то в какой-то из клеток сидит по крайней мере $k + 1$ кролик.

Пример 1. В лесу растет миллион елок. Известно, что на каждой из них не более 700000 иголок. Докажите, что в лесу найдутся две елки с одинаковым числом иголок.

Пример 2. Одиннадцать мальчиков собрали 54 ореха. Докажите, что какие-то два из них собрали одинаковое количество орехов.

Пример 3. Прямая раскрашена в 10 цветов. Докажите, что найдутся две точки одного цвета на целом расстоянии.

Задача 1. На плоскости дано 8 прямых. Докажите, что какие-то две из них образуют угол, меньший 23° .

Задача 2. В параллели 8-ого класса провели контрольную, состоящую из 3-х задач, за каждую из которых можно было получить от 0 до 3 баллов. Докажите, что найдутся два ученика, получившие одинаковое количество баллов в каждой из задач, если всего работу писали 65 человек.

Задача 3. Дано 11 различных натуральных чисел, не больших 20. Докажите, что из них можно выбрать два числа, одно из которых делится на другое.

Задача 4. Докажите, что среди степеней двойки есть две, разность которых делится на 2015.

Задача 5. Докажите, что из любых 52 целых чисел всегда можно выбрать два, разность квадратов которых делится на 100.

Задача 6. На клетчатой плоскости дано 5 произвольных узлов сетки. Докажите, что середина одного из отрезков, соединяющих какие-то две из этих точек, также является узлом сетки.

Задача 7. а) Первоклассник Петя знает только цифру 1. Докажите, что он может написать число, делящееся на 57. б) Для каких чисел помимо 57 это верно?

Задача 8. Каждая клетка прямоугольной таблицы 5×41 покрашена в белый или черный цвет. Докажите, что можно выбрать 3 столбца и 3 строки, все 9 клеток пересечения которых покрашены в один цвет.

Задача 9. Плоскость раскрашена а) в 2; б) в 3; в) в 100 цветов. Докажите, что найдется прямоугольник с вершинами одного цвета.

Задача 10. Можно ли найти 8 таких натуральных чисел, что ни одно из них не делится ни на какое другое, но квадрат любого из этих чисел делится на каждое из остальных?