Занятие 12.

Контрольная работа.

Задачи можно решать в любом порядке. При этом вовсе не нужно пытаться сделать всё, гораздо лучше будет подумать над задачами по темам тех занятий, на которых вы присутствовали. Единственное требование это подробное письменное объяснение вашего решения. Удачи!

Задача 1. а) Найдите остаток от деления $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot 403 + 2014 \cdot 2016 + 1$ на 2015. б) Найдите остаток от деления $1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot ... \cdot 201 + 1999 \cdot 2000 \cdot 2001 + 2057^2$ на 13.

Задача 2. Найдите НОД(399977, 405953).

Задача 3. Решите в целых числах $x^2 - y^2 = 900$.

Задача 4. Решите в натуральных числах $x + \frac{1}{y+\frac{1}{z+\frac{1}{w}}} = \frac{14}{11}$.

Задача 5. Раскрасьте плоскость в 3 цвета так, чтобы точка каждого из цветов присутствовала и чтобы каждая прямая была покрашена ровно в два цвета.

Задача 6. а) В арифметической прогрессии $a_{10} + a_{12} = 12$. Чему равно $a_3 + a_{13} + a_{17}$? б) В геометрической прогрессии $b_2 \cdot b_{10} = 36$. Чему равно $b_4 \cdot b_6 \cdot b_8$?

Задача 7. Целые числа a, b, c таковы, что $a^3 + b^3 + c^3 \vdots 7$. Докажите, что $abc \vdots 7$.

Задача 8. Докажите, что при любом натуральном n число $3^{3n+2} + 5 \cdot 2^{3n+1}$ делится на 19.

Задача 9. Докажите, что для любого целого n число $\frac{n^5}{120} + \frac{n^4}{12} + \frac{7n^3}{24} + \frac{5n^2}{12} + \frac{n}{5}$ целое.

Задача 10. Можно ли разрезать квадрат на тупоугольные треугольники?

Задача 11. Высота AK, биссектриса BH и медиана CM треугольника ABC пересекаются в одной точке O, причем AO=BO. Докажите, что треугольник ABC - равносторонний.

Задача 12. 12 восьмиклассников на олимпиаде решили 43 задачи, причем известно, что среди них есть школьники, которые решили ровно одну задачу, школьники, которые решили ровно две задачи, школьники, которые решили ровно три задачи, и школьники, которые решили ровно четыре задачи. Докажите, что есть восьмиклассник, который решил не менее 5 задач.

Задача 13. Докажите, что среди степеней тройки есть две, разность которых делится на 2015.

Задача 14. В квадрате со стороной 5 см отметили 76 точек. Докажите, что какие-то 4 из них можно накрыть квадратом со стороной 1 см.

Задача 15. Пятизначное число назовем «неразложимым», если оно не раскладывается в произведение двух трёхзначных чисел. Какое наибольшее количество «неразложимых» пятизначных чисел может идти подряд?