Занятие 14.

Определение 1. *Многочленом* (или *полиномом*) называется конечная сумма одночленов (мономов): $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ с $a_n \neq 0$. Числа a_i называются коэффициентами многочлена. *Старшим* коэффициентом называется a_n, *свободным членом* называется a_0. Обозначение - P(x).

Определение 2. *Степенью* многочлена $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ называется индекс старшего коэффициента. Обозначение - $deg(P) = n$.

Замечание. $P(t)$ обозначает значение многочлена P(x) в точке $x = t$, т.е. результат подстановки $a_nt^n + ... + a_1t + a_0$.

Определение 3. *Корнем* многочлена $P(x)$ называется такое число t, что $P(t) = 0$.

Деление многочлена с остатком: Поделить многочлен P(x) с остатком на многочлен Q(x) ($deg(Q) <$ $< deg(P)$) это значит найти такие многочлены S(x) и R(x) (частное и остаток соответственно), что $P(x) = S(x) \cdot Q(x) + R(x)$ и $deg(R) < deg(Q)$. Существует алгоритм деления многочленов с остатком в столбик. Пусть $P(x) = a_nx^n + ... + a_1x + a_0$ и $Q(x) = b_mx^m + ... + b_1x + b_0$ $(m < n)$. Вычтем из P(x) многочлен $Q(x) \cdot \frac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m}$, получим многочлен $\tilde{P}(x)$, у которого степень меньше n, если она меньше m, то мы нашли требуемые $S(x) = \frac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m}$ и $R(x) = \tilde{P}(x)$. А иначе записываем $\frac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m}$ как первое слагаемое частного и применяем вышеописанную процедуру к $\tilde{P}(x)$. Поскольку каждый раз степень нового $\tilde{P}(x)$ меньше степени старого хотя бы на единицу, то рано или поздно она станет меньше m и мы закончим.

Пример 1. Разделить с остатком $P(x) = 57x^3 - x^2 + 1$ на $Q(x) = x + 1$.

Замечание. 1) Как и для целых чисел для многочленов «делится» значит «делится без остатка» 2) В этом занятии мы рассматриваем многочлены только с рациональными коэффициентами.

Пример 2. Пусть многочлен P(x) делится на многочлен Q(x), а многочлен Q(x) имеет корень a. Верно ли, что a - корень P(x)?

Замечание. Таким образом, если P(x) делится на x-a, то a - корень P(x). Верно и обратное (см. **Задача 3**).

Задача 0. Какому многочлену равно произведение $(x-a) \cdot (x-b) \cdot (x-c) \cdot ... \cdot (x-z)$ (26 скобок)?

Задача 1. Разделите с остатком а) $2x^8 + 4x^6 - x^4 + 2x^3 - 7$ на $x^2 + 2x - 3$; б) $x^9 + x^8 + x^7 - 3$ на $x - 1$.

Задача 2. Докажите, что многочлены $S(x)$ и $R(x)$, удовлетворяющие условиям из определения «деления с остатком» единственны (определены однозначно).

Задача 3. а) (Теорема Безу) Пусть a - произвольное число. Докажите, что остаток от деления $P(x)$ на $x - a$ равен P(a). б) Докажите, что если a - корень P(x), то P(x) делится на $x - a$. в) Пусть a и b - различные корни P(x). Докажите, что P(x) делится на $(x-a)(x-b)$.

Задача 4. Докажите, что многочлен $(x+1)^6 - x^6 - 2x - 1$ делится на $x(x+1)(2x+1)$.

Задача 5. а) Пусть сумма коэффициентов многочлена P(x) равна 0. Докажите, что $x = 1$ - корень. б) Сумма коэффициентов многочлена при нечетных степенях равна сумме коэффициентов при четных степенях. На какой линейный многочлен он делится? в) Какое условие на коэффициенты многочлена равносильно тому, что он делится на $x^2 - 1$?

Задача 6. а) Пусть P(x) и Q(x) имеют общий корень t. Докажите, что для любых многочленов P_1 и Q_1 число t будет являться корнем многочлена $P(x) \cdot P_1(x) + Q(x) \cdot Q_1(x)$. б) При каком значении a многочлены $x^4 + ax^2 + 1$ и $x^3 + ax + 1$ имеют общий корень?

Задача 7. а) Найдите 2 корня уравнения, не раскрывая скобок: $(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1) = 5$. б) Найдите все корни.