Занятие 15.

Теорема. Пусть $a_1, a_2, ..., a_n$ - различные корни уравнения $P(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_0$. Тогда $P(x) = b_n(x - a_1)(x - a_2) \cdot ... \cdot (x - a_n)$.
док-во: Следует из Задачи 3.в) Занятия 14.

Теорема Виета. Пусть x_1, x_2 - корни уравнения $ax^2 + bx + c$. Тогда $\frac{b}{a} = -(x_1 + x_2)$ и $\frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2$.

Пример. Многочлен $x^2+px+q = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Напишите многочлен, корнями которого будут числа а) x_1^2 и x_2^2; б) $\frac{1}{x_2} + x_1$ и $\frac{1}{x_1} + x_2$.

Задача 1. При каких p и q многочлен $x^2 + px + q = 0$ имеет два различных корня 2p и p+q?

Задача 2. Многочлен $x^2+px+q = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Напишите многочлен, корнями которого будут числа а)$\frac{1}{x_1^2}$, $\frac{1}{x_2^2}$; б)x_1^3, x_2^3; в)$\frac{x_2}{x_1}$, $\frac{x_1}{x_2}$.

Задача 3. Числа p и q различны. Известно, что можно подобрать такое число x, что $x^2+px+q = 0$ и $x^2 + qx + p = 0$. Найдите p+q.

Задача 4. а) Сформулируйте теорему Виета для многочлена третьей степени. б)* Выразите многочлены $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ и $x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2$ через многочлены $x_1 + x_2 + x_3$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$ и $x_1x_2x_3$. в) Постройте многочлен, корни которого равны квадратам корней многочлена x^3-2x^2+2x+1.

Задача 5. Приведите пример многочлена P(x) с рациональными коэффициентами а) третьей степени такого, что $P(1) = 2$, $P(2) = 3$, $P(3) = 1$, $P(4) = 4$; б) четвертой степени такого, что $P(1) = 10$, $P(2) = 6$, $P(3) = 3$, $P(4) = 1$, $P(5) = 0$.

Задача 6*. Приведите пример многочлена P(x) а) степени 3, для которого выполняется тождество $P(x) + P(1 - x) = 1$; б) степени 2015. (Указание: решите задачу для линейного многочлена)

Задача 7*. У квадратного уравнения $x^2+px+q = 0$ коэффициенты p и q увеличили на единицу. Эту операцию повторили 4 раза. Приведите пример такого исходного уравнения, что у каждого из пяти полученных уравнений оба корня - целые.

Математический кружок МЦНМО. 8 класс. 24 января 2015

Занятие 15.

Теорема. Пусть $a_1, a_2, ..., a_n$ - различные корни уравнения $P(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_0$. Тогда $P(x) = b_n(x - a_1)(x - a_2) \cdot ... \cdot (x - a_n)$.
док-во: Следует из Задачи 3.в) Занятия 14.

Теорема Виета. Пусть x_1, x_2 - корни уравнения $ax^2 + bx + c$. Тогда $\frac{b}{a} = -(x_1 + x_2)$ и $\frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2$.

Пример. Многочлен $x^2+px+q = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Напишите многочлен, корнями которого будут числа а) x_1^2 и x_2^2; б) $\frac{1}{x_2} + x_1$ и $\frac{1}{x_1} + x_2$.

Задача 1. При каких p и q многочлен $x^2 + px + q = 0$ имеет два различных корня 2p и p+q?

Задача 2. Многочлен $x^2+px+q = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Напишите многочлен, корнями которого будут числа а)$\frac{1}{x_1^2}$, $\frac{1}{x_2^2}$; б)x_1^3, x_2^3; в)$\frac{x_2}{x_1}$, $\frac{x_1}{x_2}$.

Задача 3. Числа p и q различны. Известно, что можно подобрать такое число x, что $x^2+px+q = 0$ и $x^2 + qx + p = 0$. Найдите p+q.

Задача 4. а) Сформулируйте теорему Виета для многочлена третьей степени. б)* Выразите многочлены $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ и $x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2$ через многочлены $x_1 + x_2 + x_3$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$ и $x_1x_2x_3$. в) Постройте многочлен, корни которого равны квадратам корней многочлена x^3-2x^2+2x+1.

Задача 5. Приведите пример многочлена P(x) с рациональными коэффициентами а) третьей степени такого, что $P(1) = 2$, $P(2) = 3$, $P(3) = 1$, $P(4) = 4$; б) четвертой степени такого, что $P(1) = 10$, $P(2) = 6$, $P(3) = 3$, $P(4) = 1$, $P(5) = 0$.

Задача 6*. Приведите пример многочлена P(x) а) степени 3, для которого выполняется тождество $P(x) + P(1 - x) = 1$; б) степени 2015. (Указание: решите задачу для линейного многочлена)

Задача 7*. У квадратного уравнения $x^2+px+q = 0$ коэффициенты p и q увеличили на единицу. Эту операцию повторили 4 раза. Приведите пример такого исходного уравнения, что у каждого из пяти полученных уравнений оба корня - целые.