# Занятие 17.

**Пример 1.** Сравнить а) $2^{300}$ и $3^{200}$; б) $242^{11}$ и $82^{14}$; в) $2^{100}+3^{100}$ и $4^{100}$.

*Свойства неравенств:*

1) если $a>b$ и $b>c$, то $a>c$
2) если $a>b$ и c - произвольное число, то $a+c>b+c$
3) если $a>b$ и $c>0$, то $ac>bc$
4) если $a>b$ и $c>d$, то $a+c>b+d$
5) если $a>b>0$ и $c>d>0$, то $ac>bd$
6) если $a>b>0$, то $a^n>b^n$
7) если $a^n>b^n$, $a,b>0$, то $a>b$.

**Неравенство Коши (или неравенство о средних)**: Среднее арифметическое положительных чисел a и b не меньше среднего геометрического этих чисел: $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$.

**Пример 2.** Докажите неравенства: а) $a^2+9b^2\geq 6ab$; б) $(a^2+9b^2)(a^2+b^2)\geq 12a^2b^2$.

**Задача 0.** а) Что можно сказать про свойство 3), если $c<0$; б) Верно ли свойство 5), если убрать условия $b>0$ или $d>0$.

**Задача 1.** Сравните числа: а) $\frac{20150214}{20150215}$ и $\frac{20150213}{20150214}$; б) $\sqrt{23}-\sqrt{11}$ и $\sqrt{22}-\sqrt{10}$; в) $2^{40}$ и $3^{28}$; г) $16^{15}$ и $33^{13}$.

**Задача 2.** Докажите, что а) $a+\frac{1}{a}\geq 2$ при $a>0$; б) $\frac{a+c}{2}+\frac{b+d}{2}\geq\sqrt{(a+b)(c+d)}$ при положительных a, b, c, d.

**Задача 3.** Докажите неравенства: а) $(a+2)(a+3)(a+4)(a+6)>192a^2$ при $a>0$; б) $(1+\frac{a^2}{bc})(1++\frac{b^2}{ac})(1+\frac{c^2}{ab})\geq 8$ при положительных a, b, c; в) $(ab+6)(2a+3b)(\frac{9}{a^2}+\frac{4}{b^2})\geq 288$ при $a>0$, $b>0$. Когда достигается равенство?

**Задача 4.** Докажите при $a>0$, что а) $a^4+\frac{1}{a^2}+\frac{2}{a}\geq 4$; б) $a^{40}+\frac{1}{a^{16}}+\frac{2}{a^4}+\frac{4}{a^2}+\frac{8}{a}\geq 16$. Когда достигаются равенства?

**Задача 5.** Докажите неравенства: а) $(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\geq 9$ $(a,b,c>0)$; б) $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}\geq 4$ $(a,b,c,d>0)$; в) $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$.

**Задача 6.** Произведение чисел $x_1,x_2,\ldots x_n$ равно 1. Докажите, что $(1+x_1)\cdot(1+x_2)\cdot\ldots\cdot(1+x_n)\geq 2^n$.