Занятие 18.

Определение. Пусть $a_1, a_2, ..., a_n$ - произвольные числа. 1) *Средним арифметическим* этих чисел называется число $A(a_1, a_2, ..., a_n) = \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$. 2) *Средним геометрическим* этих чисел называется число $G(a_1, a_2, ..., a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}$. 3) *Средним гармоническим* этих чисел называется число $H(a_1, a_2, ..., a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}$. 4) *Средним квадратичным* этих чисел называется число $S_2(a_1, a_2, ..., a_n) = \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n}}$.

Замечание. В случае среднего геометрического мы будем считать, что $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$.

Пример 1. Найдите A, G, H, S_2 для $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ и сравните их.

Неравенство о средних: пусть a_1,a_2 ...,$a_n \geq 0$, тогда верно следующее равенство:

$$min(a_1, a_2, ...a_n) \leq H(a_1, a_2, ...a_n) \leq G(a_1, a_2, ...a_n) \leq A(a_1, a_2, ...a_n) \leq S_2(a_1, a_2, ...a_n) \leq max(a_1, a_2, ...a_n),$$

где min и max обозначают соответственно минимальное и максимальное из чисел $a_1, a_2, ..., a_n$.

Пример 2. Доказать неравенство о средних в случае n=2:

$$min(a, b) \leq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq max(a, b)$$

.

Задача 1. а) Доказать, что при $a > b > 0$ выполняется $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$. б) Пусть $G \leq A$ выполняется для любого набора $a_1, a_2, ..., a_n$. Докажите, что тогда $H \leq G$ для любого набора $a_1, a_2, ..., a_n$.

Задача 2. а) Сумма пяти положительных чисел равна 10, докажите, что сумма квадратов чисел не меньше 20. б) Какое наименьшее значение может принимать сумма четырех чисел, если их произведение равно 16. в) Докажите для $x \geq 0$ неравенство $x^5 + 3x^4 - 9x^3 + 9 \geq 0$. г) Для положительных a, b, c, d докажите неравенство $ab^2c^3d^4 \leq (\frac{a+2b+3c+4d}{10})^{10}$.

Задача 3. Докажите для положительных $a_1, ..., a_n$ неравенство $(a_1 + ... + a_n)(\frac{1}{a_1} + ... + \frac{1}{a_n}) \geq n^2$.

Неравенство Коши-Буняковского: $(a_1b_1 + ... + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + ... + b_n^2)$

Задача 4. Докажите неравенство Коши-Буняковского а) при n=2; б) при n=3.

Транс-неравенство (перестановочное неравенство): пусть $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$, $b_1 \leq b_2 \leq ... \leq$ $\leq b_n$, тогда

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_{n+1}b_{n-1} + a_nb_n \geq a_1b'_1 + a_2b'_2 + ... + a_{n-1}b'_{n-1} + a_nb'_n \geq a_1b_n + a_2b_{n-1} + ... + a_{n-1}b_2 + a_nb_1,$$

где $b'_1, b'_2, ..., b'_n$ - какая-то перестановка $b_1, b_2, ..., b_n$.

Задача 5. Докажите транс-неравенство а) для n=2 ($a_1 \leq a_2$, $b_1 \leq b_2$, тогда $a_1b_1+a_2b_2 \geq a_1b_2+a_2b_1$); б)* для n=3; в)* для произвольного n.

Задача 6. а) Докажите неравенство о средних при n=4. б) Используя замену $a_4 = \sqrt[3]{a_1a_2a_3}$ и пункт а), докажите его для n=3. в) Докажите $A \leq S_2$ для произвольного n. г) Докажите для n равного степени двойки $G \leq A$. д) Придумайте замену для a_8 по аналогии с пунктом б), которая позволяет вывести $G \leq A$ для n=7 из $G \leq A$ для n=8. е) Выведите $G \leq A$ для n=6 из $G \leq A$ для n=7. ж)* Докажите $G \leq A$ для произвольного n.