Занятие 21.

Задача 1. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ — равнобедренные прямоугольные (стороны AB и A_1B_1 — гипотенузы). Известно, что C_1 лежит на BC, B_1 лежит на AB, а A_1 лежит на AC. Докажите, что $AA_1 = 2CC_1$.

Задача 2. В треугольник ABC с прямым углом C вписана окружность, касающаяся сторон AC, BC и AB в точках M, K и N соответственно. Через точку K провели прямую, перпендикулярную отрезку MN. Она пересекла катет AC в точке X. Докажите, что $CK = AX$.

Задача 3. В прямоугольнике $ABCD$ точка M - середина стороны CD. Через точку C провели прямую, перпендикулярную прямой BM, а через точку M - прямую, перпендикулярную диагонали BD. Докажите, что два проведенных перпендикуляра пересекаются на прямой AD.

Задача 4. Поставьте на плоскости 9 точек так, чтобы никакие 4 не лежали на одной прямой, но из любых 6-ти нашлись 3, лежащие на одной прямой.

Задача 5. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки K и M соответственно так, что $KM||AC$. Отрезки AM и KC пересекаются в точке O. Известно, что $AK = AO$ и $KM = MC$. Докажите, что $AM = KB$.

Задача 6. В параллелограмме $ABCD$ опустили перпендикуляр BH на сторону AD. На отрезке BH отметили точку M, равноудаленную от точек C и D. Пусть точка K - середина стороны AB. Докажите, что угол MKD прямой.

Задача 7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ стороны AB, BC и CD равны, M — середина стороны AD. Известно, что угол BMC равен $90°$. Найдите угол между диагоналями четырехугольника $ABCD$.

Указания.

Задача 1. Опустить перпендикуляр из B_1 на BC.

Задача 2. Доказать, что $AO = XK$, где O - центр вписанной окружности.

Задача 3. Выразить длины отрезков, образующихся при пересечении этих перпендикуляров с AD, через стороны прямоугольника.

Задача 5. Доказать равенство каких-нибудь треугольников.

Задача 6. Продлить DK до пересечения с прямой BC.

Задача 7. Рассмотреть четырехугольник, образованный серединами диагоналей и сторон BC и AD.